Zadanie 1

Niech $X_1, X_2, \dots, X_6$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną 0 i wariancją $\frac{1}{\theta}$, gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Zakładamy, że parametr θ ma rozkład a priori o gęstości

$$p(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2}\beta^3\theta^2 \exp(-\beta\theta) & gdy\ \theta > 0 \\ 0 & gdy\ \theta \le 0 \end{cases},$$

gdzie $\beta > 0$ jest znane. Wyznaczamy bayesowski przedział ufności dla parametru $\frac{1}{\theta}$ postaci $[a,b]$, taki że

$$\Pi\left(\frac{1}{\theta} < a \mid x\right) = \Pi\left(\frac{1}{\theta} > b \mid x\right) = 0{,}05,$$

gdzie $\Pi(\cdot \mid x)$ oznacza prawdopodobieństwo przy rozkładzie a posteriori, gdy zaobserwowana wartość próbki losowej jest równa $x = (x_1, x_2, \dots, x_6)$. Tak otrzymany przedział jest równy

(A) $\left[\frac{2\beta + \sum_{i=1}^{6} x_i^2}{12{,}59}, \frac{2\beta + \sum_{i=1}^{6} x_i^2}{1{,}64}\right]$

(B) $\left[\frac{2\beta + \sum_{i=1}^{6} x_i^2}{7{,}81}, \frac{2\beta + \sum_{i=1}^{6} x_i^2}{0{,}35}\right]$

(C) $\left[\frac{2\beta + \sum_{i=1}^{6} x_i^2}{16{,}92}, \frac{2\beta + \sum_{i=1}^{6} x_i^2}{3{,}33}\right]$

(D) $\left[\frac{2\beta + \sum_{i=1}^{6} x_i^2}{21{,}03}, \frac{2\beta + \sum_{i=1}^{6} x_i^2}{5{,}23}\right]$

(E) $\left[\frac{2\beta + \sum_{i=1}^{6} x_i^2}{28{,}87}, \frac{2\beta + \sum_{i=1}^{6} x_i^2}{9{,}39}\right]$

Zadanie 2

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie Weibulla o funkcji gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 2\theta x e^{-\theta x^2} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem.

Rozważamy dwa estymatory funkcji $g(\theta) = P_\theta(X_1 > 1) = e^{-\theta}$:

- $T_{1,n}$ - estymator największej wiarogodności w oparciu o próbę $X_1, X_2, \ldots, X_n$
- $T_{2,n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}(X_i > 1)$, gdzie funkcja $\mathbf{1}(x > 1) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x > 1 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$.

Niech V_i oznacza wariancję asymptotyczną estymatora $T_{i,n}$, $i = 1,2$.

Wtedy stosunek $\frac{V_1}{V_2}$ jest równy

(A) $\frac{1}{\theta^2(e^\theta - 1)}$

(B) $\frac{\theta^2 e^{-\theta}}{e^\theta - 1}$

(C) $\frac{\theta^2}{e^\theta - 1}$

(D) $\frac{\theta}{e^\theta - 1}$

(E) $\frac{1}{\theta^2 e^\theta}$

Zadanie 3

Niech $N, Y_1, Y_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi przy danym $\Theta = \theta$. Zmienne $Y_i,\ i = 1,2,\ldots,$ mają warunkowe rozkłady dwupunktowe $P(Y_i = 1 \mid \theta) = \theta = 1 - P(Y_i = 0 \mid \theta)$. Warunkowy rozkład zmiennej losowej N przy danym $\Theta = \theta$ jest rozkładem ujemnym dwumianowym o funkcji prawdopodobieństwa $P(N = n \mid \theta) = (n+1)\theta^2(1-\theta)^n$ dla $n = 0,1,2,\ldots$. Rozkład brzegowy zmiennej Θ jest rozkładem beta o gęstości

$$f(\theta) = \begin{cases} 12\theta^2(1-\theta) & \text{gdy } \theta \in (0,1) \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}.$$

Niech $X_i,\ i = 1,2,\ldots,$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie wykładniczym o wartości oczekiwanej 1, niezależnymi od zmiennych $N, Y_1, Y_2, \ldots$.

Niech

$$S = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} X_i & \text{gdy } N > 0 \\ 0 & \text{gdy } N = 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad T = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} Y_i X_i & \text{gdy } N > 0 \\ 0 & \text{gdy } N = 0 \end{cases}$$

Oblicz współczynnik kowariancji $Cov(S,T)$.

(A) 2,8

(B) 3,6

(C) 1,6

(D) 0,8

(E) 4,4

Zadanie 4

Zmienna losowa (X,Y) ma rozkład prawdopodobieństwa o funkcji gęstości

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-x} & \text{gdy } 0<y<x<+\infty \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}.$$

Niech $U=Y-X$ i $V=2Y+X$.

Wtedy $E(V\,|\,U=-2)$ jest równa

(A) 5

(B) 1

(C) 3

(D) 4

(E) 2

Zadanie 5

Niech $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(1+x)^3} & gdy \ \ x > 0 \\ 0 & gdy \ \ x \le 0 \end{cases}.$$

Wtedy

$$E(Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n \mid \min(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n) = t),$$

gdzie t jest ustaloną liczbą dodatnią, jest równa

(A) $\dfrac{n+2t-1}{2}$

(B) $(2n-1)t + n - 1$

(C) $nt + n - 1$

(D) $(2n-1)t + n^2 - 1$

(E) $\dfrac{(n+1)t + n - 1}{2}$

Zadanie 6

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_9$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu normalnego $N(m_1, \sigma^2)$, a $Y_1, Y_2, \ldots, Y_9$ niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu normalnego $N(m_2, \sigma^2)$. Wszystkie zmienne są niezależne, a parametry $m_1, m_2,\ \sigma$ są nieznane. Testujemy hipotezę $H:\ m_1 = m_2$ przy alternatywie $K:\ m_1 \neq m_2$. Hipotezę H odrzucamy, gdy spełniona jest nierówność

$$\frac{|\bar{X} - \bar{Y}|}{S} > c,$$

gdzie $\bar{X} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} X_i$, $\bar{Y} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} Y_i$ i $S^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}\left(X_i - Y_i\right)^2$.

Wyznacz c tak, aby rozmiar testu był równy 0,05.

A) 0,754

(B) 0,399

(C) 0,787

(D) 0,632

(E) 0,547

Zadanie 7

Rzucono niezależnie 16 razy symetryczną monetą. Obliczyć prawdopodobieństwo, że uzyskano mniej niż 6 serii, jeśli wiadomo, że uzyskano 10 orłów i 6 reszek.

(A) $\frac{48}{1001}$

(B) $\frac{47}{1001}$

(C) $\frac{44}{1001}$

(D) $\frac{46}{1001}$

(E) $\frac{45}{1001}$

Uwaga. Serią nazywamy ciąg elementów jednego typu, przed i za którym występuje element drugiego typu, na przykład w ciągu : *aaabbbbaabbbbba* jest 5 serii (3 serie elementów typu *a* i 2 serie elementów typu *b*).

Zadanie 8

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie jednostajnym na przedziale (a,b), gdzie a,b są nieznane i $a<b$.
Rozważamy rozstęp równy
$T = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} - \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$
jako estymator długości przedziału $b-a$. Błąd średniokwadratowy tego estymatora, czyli $E_{a,b}(T-b+a)^2$, jest równy

(A) $\dfrac{2n(b-a)^2}{(n+1)^2(n+2)}$

(B) $\dfrac{4(b-a)^2}{(n+1)(n+2)}$

(C) $\dfrac{2(3n+4)(b-a)^2}{(n+1)^2(n+2)}$

(D) $\dfrac{2(2n+1)(b-a)^2}{(n+1)^2(n+2)}$

(E) $\dfrac{6(b-a)^2}{(n+1)(n+2)}$

Zadanie 9

Niech $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym zmienna Y_i, $i = 1,2,\ldots,n$, ma rozkład logarytmiczno-normalny $LN(bx_i, 1)$, gdzie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są znanymi liczbami, a b jest nieznanym parametrem. Załóżmy, że $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 9$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.
Testem jednostajnie najmocniejszym na poziomie istotności 0,01 weryfikujemy hipotezę $H_0 : b = 1$ przy alternatywie $H_1 : b > 1$. Wtedy prawdopodobieństwo błędu drugiego rodzaju przy alternatywie $b = 2$ jest równe

(A) 0,16

(B) 0,35

(C) 0,25

(D) 0,01

(E) 0,09

Zadanie 10

Niech $X_1, X_2, ..., X_n$ będzie próbką z rozkładu wykładniczego o gęstości określonej dla $x > 0$ wzorem:

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x).$$

Nie obserwujemy dokładnych wartości zmiennych X_i, tylko wartości *zaokrąglone w górę* do najbliższej liczby całkowitej. Innymi słowy, dane są wartości zmiennych losowych $Z_1, Z_2, ..., Z_n$, gdzie

$$Z_i = \lceil X_i \rceil.$$

(symbol $\lceil a \rceil$ oznacza najmniejszą liczbą całkowitą k taką, że $a \le k$).

Niech $S = \sum_{i=1}^{n} Z_i$.

Oblicz estymator *największej wiarogodności* $\hat{\lambda}$ nieznanego parametru λ oparty na obserwacjach $Z_1, Z_2, ..., Z_n$.

(A) $\hat{\lambda} = \ln\left(\frac{S}{n} - 1\right)$

(B) $\hat{\lambda} = \frac{n}{S}$

(C) $\hat{\lambda} = \left\lceil \frac{n}{S} \right\rceil$

(D) $\hat{\lambda} = \frac{S}{n}$

(E) $\hat{\lambda} = -\ln\left(1 - \frac{n}{S}\right)$

Egzamin dla Aktuariuszy z 30 września 2013 r.

Prawdopodobieństwo i Statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	D	
2	C	
3	B	
4	A	
5	B	
6	D	
7	B	
8	E	
9	C	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.