

**Zadanie 1**

Załóżmy, że zmienne losowe  $X_1, \dots, X_5, X_6, \dots, X_{20}$  są niezależne, o jednakowym rozkładzie normalnym o wartości oczekiwanej 1 i wariancji 4, oraz przyjmijmy oznaczenia:

$$S_5 = X_1 + \dots + X_5,$$

$$S_{20} = X_1 + \dots + X_{20}.$$

Wtedy  $E(S_5^2 | S_{20} = 16)$  jest równa

- (A) 16
- (B) 15
- (C) 31
- (D) 51
- (E) 26

**Zadanie 2**

Niech  $X$  będzie zmienną losową o rozkładzie wykładniczym o gęstości:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x \leq 0 \end{cases}$$

Niech:

$Z$  - oznacza część całkowitą  $X$  (część całkowita liczby  $x$  to największa liczba całkowita  $n$  taka, że  $n \leq x$ )

$U$  - oznacza część ułamkową liczby  $X$ , zatem  $U = X - Z$ .

Wtedy wartość oczekiwana  $E(ZU)$  jest równa

(A)  $\frac{1}{2(e-1)}$

(B)  $\frac{e-2}{e(e-1)}$

(C)  $\frac{e-2}{(e-1)^2}$

(D)  $\frac{e-2}{e-1}$

(E)  $\frac{e(e-2)}{(e-1)^2}$

**Zadanie 3**

Załóżmy, że dla danej wartości  $\Theta = \theta$ , zmienne losowe  $X_1, \dots, X_n, \dots$  są warunkowo niezależne i mają dwupunktowy rozkład prawdopodobieństwa:

$$P(X_i = 1 | \theta) = \theta, \quad P(X_i = 0 | \theta) = 1 - \theta.$$

Zmienna losowa  $\Theta$  ma rozkład na przedziale  $[0,1]$  o gęstości

$$\pi(\theta) = \begin{cases} 6\theta(1-\theta) & \text{dla } 0 < \theta < 1; \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Niech

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i, \text{ gdzie } n > 1 \text{ jest ustaloną liczbą całkowitą.}$$

Wyznaczono predyktor bayesowski  $\hat{X}_{n+1}(Y)$  zmiennej losowej  $X_{n+1}$  na podstawie zmiennej  $Y$  przy kwadratowej funkcji straty.

Błąd średniokwadratowy otrzymanego predyktora, czyli

$$E\left(\hat{X}_{n+1}(Y) - X_{n+1}\right)^2,$$

jest równy

(A)  $\frac{n^2 + 9n + 20}{5(n+4)^2}$

(B)  $\frac{n^2 + 10n + 20}{5(n+4)^2}$

(C)  $\frac{n^2 + 5n + 20}{5(n+4)^2}$

(D)  $\frac{1}{5(n+4)}$

(E)  $\frac{n+16}{5(n+4)^2}$

**Zadanie 4**

W urnie znajduje się  $r = 25$  kul, z których  $m = 15$  jest białych i  $r - m = 10$  czarnych. Losujemy *bez zwracania* najpierw  $n_1 = 6$  kul, a następnie spośród kul *pozostałych* w urnie, losujemy *bez zwracania*  $n_2 = 9$  kul. Niech

- $S_1$  oznacza liczbę białych kul wybranych w pierwszym losowaniu,
- $S$  oznacza liczbę białych kul wybranych w obu losowaniach.

Oblicz  $Cov(S_1, S)$ .

(A)  $Cov(S_1, S) = 1,14$

(B)  $Cov(S_1, S) = -0,54$

(C)  $Cov(S_1, S) = 0,60$

(D)  $Cov(S_1, S) = 0,90$

(E)  $Cov(S_1, S) = -0,36$

**Zadanie 5**

Niech  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie normalnym z następującymi parametrami: nieznaną wartością oczekiwaną  $EX_i = m_x$ ,  $EY_i = m_y$ , wariancją  $VarX_i = 1$  i  $VarY_i = 2$  oraz współczynnikiem korelacji  $Corr(X_i, Y_i) = 0$ . Testem jednostajnie najmocniejszym weryfikujemy hipotezę  $H_0 : m_x = 1, m_y = 2$  przy alternatywie  $H_1 : m_x = 2, m_y = 1$  na poziomie istotności 0,05. Jak najmniej liczną próbą należy dysponować, aby moc otrzymanego testu była nie mniejsza niż 0,95?

- (A) 7
- (B) 8
- (C) 9
- (D) 10
- (E) 11

**Zadanie 6**

Załóżmy, że  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie jednostajnym na przedziale  $[0,1]$ , zaś  $N$  jest zmienną losową o rozkładzie ujemnym dwumianowym

$$P(N = n) = \binom{n+2}{n} p^3 (1-p)^n \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots,$$

niezależną od zmiennych losowych  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$

Niech

$$M_N = \begin{cases} \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} & \text{gdy } N > 0 \\ 0 & \text{gdy } N = 0 \end{cases}$$

Wtedy  $E(M_N)$  jest równa

A)  $\frac{p - p^3}{2}$

(B)  $\frac{p + p^2}{2}$

(C)  $\frac{1 + p - 2p^2}{2}$

(D)  $\frac{p + p^2 - 2p^3}{2}$

(E)  $\frac{p + p^2 - p^3}{2}$

**Zadanie 7**

Niech  $X_1, X_2, \dots, X_5, Y_1, Y_2, \dots, Y_5$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie Weibulla o gęstości

$$p_\theta(x) = \begin{cases} 2\theta x \exp(-\theta x^2) & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

gdzie  $\theta > 0$  jest nieznanym parametrem. Osobno na podstawie prób losowych  $X_1, X_2, \dots, X_5$  i  $Y_1, Y_2, \dots, Y_5$  zbudowano dwa przedziały ufności dla parametru  $\theta$ , każdy na poziomie ufności 0,8, każdy postaci  $[aT, bT]$ , gdzie  $T$  jest estymatorem największej wiarygodności parametru  $\theta$  w oparciu o odpowiednią próbkę i  $a, b$  są stałymi dobranymi tak, aby dla każdego  $\theta > 0$

$$P_\theta(\theta < aT) = P_\theta(\theta > bT) = 0,1.$$

Oblicz prawdopodobieństwo, że tak zbudowane przedziały okażą się rozłączne.

- (A) 0,0500
- (B) 0,0395
- (C) 0,0790
- (D) 0,0732
- (E) 0,0366

**Zadanie 8**

Niech  $X$  będzie zmienną losową o rozkładzie Poissona o nieznannej wartości oczekiwanej  $\lambda > 0$ . Nie obserwujemy zmiennej  $X$  ale zmienną  $Y$  równą  $X$ , gdy  $X > 1$ . W wyniku tej obserwacji otrzymujemy  $n$ -elementową prostą próbę losową  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ . Rozważamy estymator parametru  $\lambda > 0$  postaci

$$T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i, \text{ gdzie } Z_i = \begin{cases} Y_i & \text{gdy } Y_i > 2 \\ 0 & \text{gdy } Y_i \leq 2 \end{cases}$$

Okazuje się, że jest to estymator nieobciążony parametru  $\lambda$ . Wariancja tego estymatora jest równa

(A)  $\frac{\lambda}{n}$

(B)  $\frac{\lambda^2}{n(e^\lambda - 1)}$

(C)  $\frac{1}{n} \left( \frac{\lambda^3}{e^\lambda - 1 - \lambda} + \lambda \right)$

(D)  $\frac{1}{n} \left( \frac{\lambda^2}{e^\lambda - 1 - \lambda} + \lambda \right)$

(E)  $\frac{\lambda^2}{n(e^\lambda - 1 - \lambda)}$



**Zadanie 9**

Zmienna losowa  $N$  ma rozkład geometryczny postaci

$$P(N = k) = \left(\frac{1}{4}\right)^k \frac{3}{4} \text{ dla } k = 0, 1, 2, \dots$$

Rozważamy losową liczbę zmiennych losowych  $X_1, X_2, \dots, X_N$ , przy czym zmienne losowe  $X_1, X_2, \dots, X_N$  są niezależne wzajemnie i niezależne od zmiennej losowej  $N$ .

Każda ze zmiennych losowych  $X_i$  ma ten sam rozkład o parametrach

$$EX = 1, \quad E(X^2) = 2, \quad E(X^3) = 4.$$

Niech

$$S_N = \begin{cases} \sum_{i=1}^N X_i & \text{gdy } N > 0 \\ 0 & \text{gdy } N = 0 \end{cases}.$$

Współczynnik asymetrii  $\frac{E(S_N - ES_N)^3}{(\text{Var}S_N)^{3/2}}$  jest równy

- (A) 1,944
- (B) 3,672
- (C) 0
- (D) 1,269
- (E) 3,024

**Zadanie 10**

Niech  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie Pareto o gęstości określonej dla  $x > 0$  wzorem:

$$f_{\lambda, \theta}(x) = \frac{\theta \lambda^\theta}{(\lambda + x)^{\theta+1}},$$

gdzie  $\lambda, \theta > 0$  są nieznanymi parametrami.

Niech  $\hat{\lambda}_n, \hat{\theta}_n$  oznaczają estymatory największej wiarygodności parametrów odpowiednio  $\lambda$  i  $\theta$  w oparciu o próbę  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

Wtedy przy  $\lambda = 1, \theta = 4$  granica

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\sqrt{n}|\hat{\lambda}_n - 1| > \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

jest równa

- (A) 0
- (B) 0,8415
- (C) 0,3173
- (D) 0,1336
- (E) 0,9512

**Egzamin dla Aktuariuszy z 10 marca 2014 r.****Prawdopodobieństwo i Statystyka****Arkuszu odpowiedzi\***

Imię i nazwisko : .....KLUCZ ODPOWIEDZI.....

Pesel .....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	C	
2	C	
3	A	
4	C	
5	B	
6	D	
7	D	
8	C	
9	E	
10	B	

---

\* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.