

**Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy**

**LXXI Egzamin dla Aktuariuszy z 15 czerwca 2015 r.**

**Część II**

**Matematyka ubezpieczeń życiowych**

**Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: .....**

Czas egzaminu: 100 minut

Warszawa, 15 czerwca 2015 r.

1. Rozważmy wyjściową demografię D z intensywnością natężenia śmiertelności  $\mu_x$  dla  $x > 0$ .

Dalej rozważamy następujące możliwe zaburzenia demografii D:

- D1 ma funkcję intensywności śmiertelności daną wzorem

$$\mu_x^{(1)} = \mu_x - \Delta\mu \quad \text{dla } x > 0.$$

- D2 ma funkcję intensywności śmiertelności

$$\mu_x^{(2)} = m\mu_x \quad \text{dla } x > 0.$$

Wiadomo, że

$${}_{50}p_{20}^{(1)} = {}_{50}p_{20}^{(2)} = p$$

oraz dane są

$$\Delta\mu = 0,002; m = 0,9$$

Oblicz  $p$ . Wybierz odpowiedź najbliższą.

- (A) 0,403      (B) 0,407      (C) 0,411      (D) 0,415  
(E) 0,419

2. Rozważamy ciągle ubezpieczenie na życie dla (25) wylosowanego z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym  $\omega = 100$ , kupione za składkę jednorazową netto  $SJN$ . Wypłaci ono uposażonym 1 w chwili śmierci. Niech  $PV$  oznacza wartość obecną świadczenia na moment wystawienia polisy. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że  $|PV - SJN| < SD(PV)$ , gdzie  $SD$  oznacza odchylenie standardowe. Techniczna intensywność oprocentowania wynosi  $\delta = 0,04$ . Wybierz najbliższą odpowiedź.

(A) 0,63  
(E) 0,75

(B) 0,66

(C) 0,69

(D) 0,72

3. Ubezpieczyciel wystawia 20-letnie ubezpieczenia na życie i dożycie osobom z populacji o wykładniczym rozkładzie czasu życia z parametrem  $\mu = 0,02$ . Dla oprocentowania  $\delta = 0,03$  podaj, ile złotych sumy ubezpieczenia na życie powinno przypadać na 100 zł sumy ubezpieczenia na dożycie, by ubezpieczyciel nie odczuwał skutków drobnych zmian parametru  $\mu$ . Wskaż najbliższą wartość.

(A) 66  
(E) 74

(B) 68

(C) 70

(D) 72

4. Osoba z populacji, w której śmiertelność opisuje funkcja

$$\mu_{x+t} = 0,002 \cdot 1,05^{x+t}$$

ufundowała w dniu 50 urodzin donację, która wypłaci w dniu 65 urodzin 100 000 zł, jeśli fundator będzie żył, lub (także w dniu 65 urodzin) 50 000 zł, jeśli nie dożyje tego dnia.

Fundator zdeponował na rachunku z rocznym oprocentowaniem 3% kwotę równą wartości oczekiwanej  $PV$  wypłaty powiększoną o połowę odchylenia standardowego. Ile będzie musiał dopłacić fundator w 65 urodziny, jeśli dożyje tego dnia? Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 6 755            (B) 6 980            (C) 7 205            (D) 7 430  
(E) 7 655

5. Dane jest ciągle ubezpieczenie dla  $(x)$  ze zmienną sumą ubezpieczenia  $c(t)$  opłacane za pomocą ciągłej renty życiowej składek ze stałą intensywnością netto  $\bar{P} = 3,5$ . Dla pewnego  $t > 0$  wiadomo, że  $V(t) = 19,5$  oraz

$$\frac{\pi^r(t)}{\pi^s(t)} = \frac{1}{9}.$$

Oblicz przybliżoną wartość

$$V\left(t + \frac{1}{12}\right).$$

Techniczna intensywność oprocentowania wynosi  $\delta = 0,07$ . Wybierz najbliższą odpowiedź.

- (A) 19,83      (B) 19,88      (C) 19,93      (D) 19,98  
(E) 20,03

6. Rozważamy ciągle  $n$ -letnie ubezpieczenie na życie i dożycie dla  $(x)$  wylosowanego z populacji wykładniczej z parametrem  $\mu_{x+t} \equiv \mu = 0,02$ . Przez  $n$  lat (lub krócej) płaci on składkę netto w postaci  $n$ -letniej renty życiowej ze stałą intensywnością netto  $\bar{P}$ . Po ewentualnym dożyciu do wieku  $(x+n)$  zostaje wypłacona suma ubezpieczenia 1. Natomiast w przypadku śmierci ubezpieczonego w wieku  $x+t$ , gdzie  $t < n$  zostanie wypłacone natychmiast świadczenie  $c(t)$ . Schemat świadczenia śmiertelnego  $c(t)$  jest tak dobrany, że dla każdego  $0 < t < n$  mamy

$$\pi^s(t) = \frac{t}{n} \bar{P}$$

gdzie  $\pi^s(t)$  oznacza intensywność składki oszczędnościowej. Oblicz wartość  $c(n/2)$ . Dane są :

$$x = 30; \quad n = 40; \quad \delta = 0,05.$$

Wybierz najbliższą odpowiedź.

- (A) 0,65                      (B) 0,69                      (C) 0,73                      (D) 0,77  
(E) 0,81

7. W  $n$ -letnim ubezpieczeniu na życie i dożycie z sumą ubezpieczenia 100 000 zł składka jest płacona w stałej wysokości na początku roku przez cały okres ubezpieczenia.

Ubezpieczyciel poniósł koszty początkowe oraz ponosi na początku każdego roku koszty administracyjne w stałej kwocie. W pierwszym roku płatności z tytułu kosztów początkowych i administracyjnych były o 4000 wyższe od pobranej składki brutto. Wiadomo, że na moment wystawienia polisy łączna wartość strumienia kosztów administracyjnych jest dwukrotnie wyższa od kosztu początkowego.

Wyznacz udział narzutów na koszty w składce brutto, jeśli dane są:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 12,50 \quad \text{oraz} \quad i = 3\%$$

Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 31,2%      (B) 31,4%      (C) 31,6%      (D) 31,8%  
(E) 32,0%



8. Siły Zbrojne werbują zawodowych żołnierzy do 10-letniej misji wojskowej. Składnikiem wynagrodzenia jest obowiązkowe ubezpieczenie emerytalne ze składką płaconą przez okres pełnienia misji ze stałą roczną intensywnością  $\bar{P}$ . Werbowani są sprawni żołnierze w wieku ( $x$ ) lat. Ci, którzy zostaną inwalidami w czasie trwania misji, przerywają płacenie składek i od wieku ( $x+30$ ) uzyskują dożywotnią rentę ze stałą intensywnością roczną 36 000 zł. Inwalidztwo ujawnione po zakończeniu misji, a przed wiekiem emerytalnym ( $x+30$ ) daje również wypłatę 36 000 zł po osiągnięciu wieku emerytalnego. Sprawni w wieku ( $x+30$ ) otrzymują dożywotnią rentę z intensywnością 24 000 zł i ich renta zostaje podwyższona do 36 000 zł od momentu ujawnienia się inwalidztwa w wieku powyżej ( $x+30$ ) lat.

Rozkład czasu trwania życia nie zależy od tego, czy jest się inwalidą czy nie. Stan inwalidztwa jest nieodwracalny. Nie można przerwać udziału w misji z powodów innych niż śmierć lub inwalidztwo.

Dane są:  $\mu_{x+t}^{(d)} = 0,02$        $\mu_{x+t}^{(i)} = 0,03$        $\delta = 0,04$ .

Wyznacz roczną intensywność składki  $\bar{P}$ . Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 13 685      (B) 13 900      (C) 14 115      (D) 14 330  
(E) 14 545

9. Rozważamy dwie aktuarialnie równoważne emerytury małżeńskie dla niej ( $x$ ) i niego ( $y$ ):

- E1 płaci na początku roku 12 000 aż do drugiej śmierci;
- E2 płaci na początku każdego roku 15000 póki żyją oboje, a po pierwszej śmierci 6980,77 na początku każdego roku owdowiałej osobie aż do jej śmierci. Dodatkowo wypłacane jest świadczenie 30 000 na koniec roku pierwszej śmierci, przy czym na to dodatkowe świadczenie przeznaczona jest  $1/8$  całej składki netto SJN.

Oblicz składkę jednorazową netto SJN. Wiadomo, że  $d=0,05$ . Wybierz najbliższą odpowiedź.

- (A) 165 800      (B) 166 800      (C) 167 800      (D) 168 800  
(E) 169 800

10. Kobieta (64), wylosowana z populacji de Moivre'a z parametrem  $\omega = 100$ , traci pracę z powodu nabycia pełnych uprawnień do emerytury w ZUS. Może przejść na emeryturę, ale rozważa jej opóźnienie o 3 lata, bez wpłacania w tym czasie składek do ZUS. Osobie przechodzącej na emeryturę w wieku ( $x$ ) ZUS wylicza roczną wysokość świadczenia z formuły  $K_x/\dot{e}_x$ , gdzie  $K_x$  oznacza kapitał na koncie emerytalnym w ZUS,  $\dot{e}_x$  jest dalszym trwaniem życia z tablic de Moivre'a z parametrem  $\omega = 90$ .  
Do momentu przejścia na emeryturę kapitał emerytalny jest waloryzowany 2% na rok. Po przejściu na emeryturę świadczenia są waloryzowane 1% rocznie.  
Rozpatrywana osoba ma preferencje czasowe względem wcześniejszego dochodu na poziomie 3% rocznie.  
Podaj prawdopodobieństwo zdarzenia, że przejście na emeryturę odroczone do wieku 67 lat okaże się opłacalne, czyli  $PV$  wypłat z opóźnionej emerytury okaże się wyższe od  $PV$  wypłat z emerytury podjętej 3 lata wcześniej.  
Przyjmij ciągły typ wypłat emerytalnych oraz ciągłe waloryzacje kapitału i świadczeń. Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 0,229      (B) 0,238      (C) 0,247      (D) 0,256  
(E) 0,265

**LXXI Egzamin dla Aktuariuszy z 15 czerwca 2015 r.****Matematyka ubezpieczeń życiowych****Arkusz odpowiedzi\***

Imię i nazwisko : .....

Pesel .....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja
1	B	
2	E	
3	C	
4	E	
5	B	
6	C	
7	D	
8	A	
9	B	
10	E	

\* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.  
• Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.