

**Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy**

**LXV Egzamin dla Aktuariuszy z 30 września 2013 r.**

**Część II**

**Matematyka ubezpieczeń życiowych**

**Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: .....**

Czas egzaminu: 100 minut

Warszawa, 30 września 2013 r.

1. Niech  $e_{x:\bar{t}|} = E(\min(T(x), t))$  oznacza przeciętne dalsze trwanie życia ( $x$ ) w okresie najbliższych  $t$  lat. Wiadomo, że

$e_{x:\bar{t}|} = 13$  oraz  $\mu_x = 0,02$ . Oblicz przybliżoną wartość  $e_{x-1/12:\overline{t+1/12}|}$ .

- (A) 13,06152      (B) 13,06157      (C) 13,06162      (D) 13,06167  
(E) 13,06172

2. Rozpatrujemy dożywotnie ubezpieczenie rentowe dla  $(x)$ , wypłacające na koniec pełnego roku ubezpieczenia świadczenie rentowe w wysokości 10 000 zł, a w roku w którym nastąpi śmierć – świadczenie śmiertelne  $u \cdot 10\,000$  zł, gdzie  $u \in [0, 1)$  oznacza przeżyty część roku. Świadczenie śmiertelne jest wypłacane w chwili śmierci. Przyjmij, że śmiertelność ma w każdym roku jednostajny rozkład.

Wyznacz jednorazową składkę netto za to ubezpieczenie, jeśli

$$\bar{A}_x = 0,15 \quad \text{oraz} \quad i = 5\% .$$

Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 170 000      (B) 170 100      (C) 170 200      (D) 170 300  
(E) 170 400

3. Rozważmy trzy polisy ciągłe. Każda z nich będzie opłacana za pomocą ciągłej renty życiowej z odpowiednio dobraną intensywnością składek netto. Każda dotyczy osoby w początkowym wieku  $x$ :
1. Polisa nr 1 jest zwykłym ubezpieczeniem ciągłym na życie, które wypłaci umówione 1 zł w chwili śmierci; składki płacone są w formie dożywotniej ciągłej renty życiowej składek netto z intensywnością  $\bar{P}_1$ .
  2. Polisa nr 2 jest też ubezpieczeniem na życie, które wypłaci 1 zł w chwili śmierci, ale składki są płacone w formie renty życiowej  $m$ -letniej z odpowiednio dobraną intensywnością netto  $\bar{P}_2$ .
  3. Polisa nr 3 jest typową ciągłą polisą emerytalną: świadczenie emerytalne wypłacane jest w formie renty dożywotniej ciągłej dla  $(x)$  odroczonej o  $m$  lat z intensywnością 1 zł; natomiast składki są opłacane jak w przypadku polisy nr 2, z odpowiednią intensywnością netto  $\bar{P}_3$ .

Dane są:

$$\bar{P}_1 = 0,03, \bar{P}_2 = 0,04.$$

Oblicz  $\bar{P}_3$ . Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 0,33                      (B) 0,34                      (C) 0,35                      (D) 0,36  
(E) 0,37

4. Rozważamy ubezpieczenie ciągle ogólnego typu dla (25) wylosowanego z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym  $\omega = 100$ . Intensywność składki netto  $\pi(t)$  jest stała, natomiast świadczenie śmiertelne  $c(t)$ , które będzie wypłacone, gdy ubezpieczony umrze w wieku  $25 + t$  dane jest wzorem

$$c(t) = \frac{1}{\mu_{25+t}}.$$

dla  $0 \leq t < 75$ . Niech  $L$  oznacza stratę ubezpieczyciela na moment wystawienia polisy. Oblicz  $Var(L)$ . Techniczna intensywność oprocentowania wynosi  $\delta = 0,02$ . Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 1 000            (B) 1 010            (C) 1 020            (D) 1 030  
(E) 1 040

5. W pewnej populacji wykładniczej osoby zaczynają pracę w wieku 25 i dożywają przeciętnie wieku 75. Ponadto póki pracują, płacą ciągłą rentę życiową składek emerytalnych z roczną intensywnością  $\bar{P}$ . Po dożyciu wieku emerytalnego 65 zaczynają otrzymywać emeryturę w formie dożywotniej renty ciągłej z roczną intensywnością  $\bar{E}$ .

W wyniku postępu cywilizacyjnego zmalała śmiertelność w rozważanej populacji: dalej jest ona wykładnicza, ale (25) dożywa teraz przeciętnie wieku 80 lat. O ile lat należy zwiększyć wiek emerytalny, aby nie zmieniła się relacja  $\bar{P}/\bar{E}$ ?

Przeprowadź odpowiednie rachunki netto używając technicznej intensywności oprocentowania  $\delta = 0,02$ . Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 1,7                      (B) 1,9                      (C) 2,1                      (D) 2,3  
(E) 2,5

6. Rozpatrujemy 30-letnie ubezpieczenie na życie i dożycie, wypłacające świadczenie śmiertelne 100 000 zł w momencie śmierci lub 200 000 zł w przypadku przeżycia 30 lat. Składka ma być płacona przez cały okres ubezpieczenia ze stałą intensywnością.

Ubezpieczony jest osobą z populacji o wykładniczym rozkładzie czasu życia z parametrem  $\mu = 0,02$ . Po 15 latach ubezpieczony zrezygnował z dalszego płacenia składek i poprosił o zmianę ubezpieczenia na bezskładkowe i utrzymanie dotychczasowych sum ubezpieczenia.

Podaj nowy termin ważności ubezpieczenia (od momentu jego konwersji), jeśli  $\delta = 0,03$ . Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 26                      (B) 29                      (C) 32                      (D) 35  
(E) 38

7. Osoba w wieku 40 lat zawarła 30-letnie ubezpieczenie na życie i dożycie ze świadczeniem śmiertelnym płatnym na koniec roku śmierci i sumą ubezpieczenia 10 000 zł. Składka za to ubezpieczenie jest płacona przez 20 lat, na początku roku, w stałej kwocie  $P$ . W składce  $P$  zawarty jest narzut na koszty administracyjne ubezpieczyciela w wysokości 500 zł. Ubezpieczyciel ponosi koszty administracyjne przez cały okres ubezpieczenia, w stałej kwocie na początku każdego roku. Inne koszty nie były brane pod uwagę. Oblicz, ile wyniesie rezerwa na koszty administracyjne po 15 latach trwania tego ubezpieczenia, jeśli dana jest  $\ddot{a}_{40:\overline{20}|} = 11,610$  oraz znane są rezerwy składek netto na 1 zł sumy ubezpieczenia w analogicznych ubezpieczeniach na życie i dożycie, ale ze składką płaconą przez cały okres ubezpieczenia:

$${}_{15}V_{40:\overline{20}|} = 0,625$$

$${}_{15}V_{40:\overline{30}|} = 0,315 .$$

Podaj najbliższą wartość.

- (A) 1 600      (B) 1 700      (C) 1 800      (D) 1 900  
(E) 2 000



8. Rozważamy mężczyznę w początkowym wieku 65 wylosowanego z populacji de Moivre'a z wiekiem nieprzekraczalnym  $\omega_m > 65$ . Oprócz tego rozważamy kobietę w początkowym wieku 60 wylosowaną z populacji de Moivre'a z wiekiem nieprzekraczalnym  $\omega_k > 65$ . Oblicz prawdopodobieństwo  $p$  zdarzenia, że on będzie żył dłużej niż ona. Dane są prawdopodobieństwa:  
 $\Pr(T(k) > T(m) + 3) = 0,5682$  oraz  $\Pr(T(k) > T(m) + 1) = 0,6136$ .  
Zakładamy, że ich życia są niezależne.

- (A) 0,3631      (B) 0,3637      (C) 0,3643      (D) 0,3649  
(E) 0,3655

9. Rozważamy 20-letnie ubezpieczenie dla osoby w wieku 50 lat, które wypłaca następujące świadczenia:

- 300 000 zł w momencie śmierci spowodowanej wypadkiem,
- 100 000 zł w momencie „zwykłej” śmierci (niespowodowanej wypadkiem),
- 200 000 zł w przypadku dożycia do wieku 70 lat.

Śmiercią zwykłą rządzi prawo de Moivre’a z granicznym wiekiem 100 lat. Śmierć wypadkowa ma rozkład wykładniczy z parametrem  $\mu = 0,02078$ .

Wyznacz jednorazową składkę netto za to ubezpieczenie dla technicznej stopy procentowej  $i = 4\%$ . Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 118 860      (B) 119 360      (C) 119 860      (D) 120 360  
(E) 120 860

**10.** Rozpatrujemy uprawnienia inwalidzkie kohorty 40-letnich uczestników planu emerytalnego, wszyscy urodzeni 1 stycznia, wszyscy z 10-letnim stażem uczestnictwa, wszyscy są aktywni, czyli nikt nie jest inwalidą.

Formuła rocznego wymiaru świadczenia inwalidzkiego :

$$R_{30+t} = 0.02 \cdot [t] \cdot (AS)_{30+t} \quad 10 \leq t \leq 30$$

gdzie  $[t]$  jest częścią całkowitą  $t$  oraz  $(AS)_x$  jest rocznym wynagrodzeniem osoby w wieku  $x$  lat. Płace zmieniają się raz w roku, na początku roku. Tuż po podwyżce  $(AS)_{40} = 40\,000$ .

Wartość jednostkowej renty inwalidzkiej na moment przejścia na rentę opisuje funkcja

$$\bar{a}_{30+t}^{(i)} = 25 - \frac{t}{2}, \quad 10 \leq t \leq 30.$$

W kohorcie 40-latków roczne ubytki inwalidzkie stanowią 1/4 całkowitych ubytków z planu, czyli

$$4 \cdot q_{40}^{(i)} = q_{40}^{(\tau)} = 0.008.$$

Aktualna wartość świadczeń inwalidzkich aktywnego uczestnika  $apv(INV)_{40} = 2200$ , po sprowadzeniu na środek roku wartości świadczeń tych, którzy w danym roku przechodzą na rentę inwalidzką. Wyznacz w analogiczny sposób  $apv(INV)_{41}$  przy  $i = 5\%$ . Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 2 000                      (B) 2 075                      (C) 2 150                      (D) 2 225  
 (E) 2 300

**LXV Egzamin dla Aktuariuszy z 30 września 2013 r.****Matematyka ubezpieczeń życiowych****Arkusz odpowiedzi\***

Imię i nazwisko : .....Klucz odpowiedzi.....

Pesel .....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	D	
2	A	
3	A	
4	C	
5	B	
6	E	
7	C	
8	B	
9	D	
10	A	

\* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.