

**Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy**

**XLV Egzamin dla Aktuariuszy z 17 marca 2008 r.**

**Część II**

**Matematyka ubezpieczeń życiowych**

**Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: .....**

Czas egzaminu: 100 minut

Warszawa, 17 marca 2008 r.

1. Niech  $e_{x:\overline{1}|}(\text{CF})$  oznacza przeciętne dalsze trwanie życia ( $x$ ) w ciągu najbliższego roku obliczone przy założeniu hipotezy interpolacyjnej o stałym natężeniu wymierania między wiekami całkowitymi. Podobnie niech  $e_{x:\overline{1}|}(\text{B})$  oznacza tę samą wielkość obliczoną przy założeniu hipotezy interpolacyjnej Balducciego.

Wiadomo, że  $x$  jest liczbą całkowitą oraz  $p_x = 0.99$ .

Obliczyć  $e_{x:\overline{1}|}(\text{CF}) \cdot e_{x:\overline{1}|}(\text{B})$ .

Wybrać wartość najbliższą.

- (A) 0,988
- (B) 0,989
- (C) 0,990
- (D) 0,991
- (E) 0,992.

2. Niech  $Z$  oznacza wartość obecną świadczenia z ubezpieczenia bezterminowego na życie dla  $(x)$ , które wypłaca  $1$  w chwili śmierci. Ponadto, niech  $Y$  oznacza wartość obecną renty życiowej dla  $(x)$ , która wypłaca świadczenie z intensywnością roczną  $1$  aż do śmierci. Zakładamy, że  $(x)$  należy do populacji wykładniczej ze stałym natężeniem wymierania  $\mu_{x+t} = \mu > 0$  oraz, że techniczna intensywność oprocentowania wynosi  $\delta > 0$ .

Ponadto wiadomo, że

$$\Pr(Z < E(Z)) = \Pr(Y < E(Y)).$$

Wówczas spełnione jest równanie:

(A)

$$E(Z) + E(Y) = \frac{\delta + \mu + 1}{2\delta}$$

(B)

$$E(Z) + E(Y) = \frac{\delta + 2}{2\delta}$$

(C)

$$E(Z) + E(Y) = \frac{\delta + \mu + 1}{\delta}$$

(D)

$$E(Z) + E(Y) = \frac{2\mu + 1}{2\delta}$$

(E)

$$E(Z) + E(Y) = \frac{\delta + 1}{2\delta}$$

1.

3. Niech standardowo  $\bar{P}(\bar{A}_x)$  oznacza intensywność roczną składki netto za ubezpieczenie bezterminowe ciągle wypłacające **1** w chwili śmierci. Składka jest opłacana w postaci renty życiowej ciągłej. Niech ponadto  $\delta > 0$  oznacza techniczną intensywność oprocentowania. Wówczas pochodna  $\frac{d\bar{P}(\bar{A}_x)}{d\delta}$  wyraża się wzorem:

$$(A) \quad \frac{d\bar{P}(\bar{A}_x)}{d\delta} = \frac{(I\bar{a})_x - \bar{A}_x}{\bar{a}_x^2}$$

$$(B) \quad \frac{d\bar{P}(\bar{A}_x)}{d\delta} = \frac{(I\bar{a})_x - \bar{a}_x}{\bar{a}_x^2}$$

$$(C) \quad \frac{d\bar{P}(\bar{A}_x)}{d\delta} = \frac{(I\bar{a})_x - \bar{a}_x^2}{\bar{a}_x^2}$$

$$(D) \quad \frac{d\bar{P}(\bar{A}_x)}{d\delta} = \frac{(I\bar{a})_x - \bar{A}_x \cdot \bar{a}_x}{\bar{a}_x^2}$$

$$(E) \quad \frac{d\bar{P}(\bar{A}_x)}{d\delta} = \frac{(I\bar{a})_x - 1}{\bar{a}_x^2}$$

4. Za jednorazową składkę netto  $S_{JN} = 1$  osoba (65) może kupić natychmiastową emeryturę dożywotnią z gwarantowanym okresem wypłat o długości  $g$ . Będzie ona wypłacana w formie renty życiowej ciągłej ze stałą roczną intensywnością  $E(g)$ , ale nie krócej niż przez  $g$  lat.

Wówczas funkcja  $E(g)$  spełnia następujące równanie różniczkowe:

(A)

$$E'(g) = -E(g) e^{-\delta g} \cdot g q_{65}$$

(B)

$$E'(g) = -E(g)^2 e^{-\delta g} \cdot g q_{65}$$

(C)

$$E'(g) = -E(g) e^{-\delta g} \cdot g p_{65}$$

(D)

$$E'(g) = -E(g)^2 e^{-\delta g} \cdot g p_{65} \cdot g q_{65}$$

(E)

$$E'(g) = -E(g)^2 e^{-\delta g} \cdot g p_{65}$$



5. (25) należący do populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym  $\omega = 100$  zaciągnął kredyt w wysokości  $K = 100000$ . Będzie go spłacał przez najbliższe  $n = 30$  lat za pomocą jednej z poniższych metod:

(1) metodą równych rat (zwaną czasem *annuitetową*),

albo

(2) metodą równych rat kapitałowych (saldo liniowe),

każdorazowo w formie renty ciągłej 30-letniej o odpowiednio dobranej funkcji intensywności rat. Intensywność oprocentowania kredytu jest stała w czasie i wynosi  $0,03$  dla obu metod.

Nasz kredytobiorca musi ubezpieczyć ryzyko niespłacenia kredytu z powodu przedwczesnej śmierci (tzn. śmierci przed osiągnięciem wieku 55). Niech  $SJN(1)$  (odpowiednio  $SJN(2)$ ) oznacza składkę jednorazową netto za to ubezpieczenie, gdy wybierze pierwszą (odpowiednio drugą) metodę spłaty.

Techniczna intensywność oprocentowania używana do kalkulacji składek wynosi  $\delta = 0,03$ .

Obliczyć  $SJN(1) - SJN(2)$ .

Wybrać wartość najbliższą.

- (A) 1900
- (B) 2000
- (C) 2100
- (D) 2200
- (E) 2300.

6. (60) wzięty z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym  $\omega = 100$  kupuje za jednorazową składkę netto  $S/N$  następujący produkt emerytalny:

(a) Do końca życia będzie pobierać emeryturę w postaci renty życiowej ciągłej z roczną intensywnością stale równą  $1$ ;

(b) Oprócz tego w chwili jego śmierci uposażeni otrzymają jednorazowe świadczenie w wysokości uzależnionej od bieżącej rezerwy; dokładniej:

Jeżeli umrze w wieku  $60 + t$ , to świadczenie  $b(t)$  wyniesie

$$b(t) = V(t) \cdot \frac{40 + t}{80}$$

gdzie  $0 < t < 40$ . Znaleźć  $S/N$  obliczoną przy technicznej intensywności oprocentowania  $\delta = 0,02$ .

Wybrać wartość najbliższą.

- (A) 20,38
- (B) 21,38
- (C) 22,38
- (D) 23,38
- (E) 24,38.

7. Rozważamy polisę na życie wystawioną ( $x$ ), która wypłaci świadczenie w chwili śmierci. Wysokość świadczenia jest uzależniona od rodzaju śmierci:

- gdy ubezpieczony zginie w wypadku ( $J = 2$ ) zostanie wypłacona suma  $s > 1$ ,
- gdy ubezpieczony umrze, ale nie w wypadku ( $J = 1$ ) zostanie wypłacone 1.

Niech  $Z$  oznacza wartość obecną wypłaty. Dane są:

$$\mu_{1,x+t} \equiv 0,01, \mu_{2,x+t} \equiv 0,001, \delta = 0,03, E(Z) = 0,3.$$

Obliczyć  $\text{Var}(Z)$ .

Wybrać wartość najbliższą.

- (A) 0,125
- (B) 0,130
- (C) 0,135
- (D) 0,140
- (E) 0,145.

---

8. Mężczyzna **(65)** należy do populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym  $\omega_m = 90$  a kobieta **(60)** należy do populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym  $\omega_k = 100$ . Obliczyć  $Cov(T(65), T(65:60))$

Zakładamy, że zmienne losowe  $T(60)$  oraz  $T(65)$  są niezależne.

Wybrać odpowiedź najbliższą.

- (A) 34,8
- (B) 35,8
- (C) 36,8
- (D) 37,8
- (E) 38,8.

9. Rozpatrujemy bezterminowe ubezpieczenie na życie dla (25) wypłacające 1 na koniec roku śmierci i opłacane za pomocą corocznych składek w stałej wysokości netto  $P_{25}$ . Dane są:

$$i = 5\%, \quad {}_{30}P_{25} = 0.941077, \quad q_{54} = 0.00535, \quad q_{55} = 0.00576,$$

$$\text{Var}(A_{29}) = 0.00251252, \quad \text{Var}(A_{30}) = 0.00258994.$$

Obliczyć rezerwę składek netto  ${}_{29}V$ .

Podać odpowiedź najbliższą.

- (A) 0.230
- (B) 0.235
- (C) 0.240
- (D) 0.245
- (E) 0.250.

10. Za jednorazową składkę netto KM (od *kwota męża*) mąż ( $x$ ) może kupić rentę dożywotnią ciągłą, która będzie wypłacać z roczną intensywnością  $E_x(KM)$  aż do jego śmierci. Podobnie, za jednorazową składkę netto KŻ (od *kwota żony*) żona ( $y$ ) może kupić rentę dożywotnią ciągłą, która będzie wypłacać z roczną intensywnością  $E_y(KŻ)$  aż do jej śmierci. Mogą wreszcie za kwotę KM+KŻ kupić emeryturę małżeńską, która będzie wypłacać z roczną intensywnością  $E(KM + KŻ)$  aż do drugiej śmierci. Wiadomo, że:

$$\frac{E_x(20) + E_y(10)}{E(30)} = 1,46581$$

$$\frac{E_x(15) + E_y(20)}{E(35)} = 1,35897$$

Obliczyć:

$$\frac{E_x(20) + E_y(20)}{E(40)}$$

Podać odpowiedź najbliższą.

- (A) 1,37
- (B) 1,39
- (C) 1,41
- (D) 1,43
- (E) 1,45.

**XLV Egzamin dla Aktuariuszy z 17 marca 2008 r.****Matematyka ubezpieczeń życiowych****Arkusz odpowiedzi\***

Imię i nazwisko : .....

Pesel .....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	C	
2	E	
3	C	
4	B	
5	A	
6	C	
7	A	
8	B	
9	D	
10	B	

\* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.