Zadanie 1.
Niech zmienne losowe:

- $X_{t,k} = \mu + \alpha_k + \beta_t + \varepsilon_{t,k},\ k = 1,2,\dots,K$ oraz $t = 1,2,\dots,T$,

oznaczają łączne wartości szkód odpowiednio dla k-tego kontraktu w t-tym roku.
O składnikach naszych zmiennych zakładamy, że:

- $\mu, \alpha_1, \dots, \alpha_K, \beta_1, \dots, \beta_T$ to nieznane, ale stałe (nielosowe) parametry, które spełniają następujące założenia normujące:
- $\alpha_1 + \dots + \alpha_K = 0,\ \ \beta_1 + \dots + \beta_T = 0$
- $\varepsilon_{t,k}$ jest jedynym losowym składnikiem zmiennej $X_{t,k}$,
- Wszystkie składniki losowe (dla $k = 1,2,\dots,K$ oraz $t = 1,2,\dots,T$) są niezależnymi zmiennymi losowymi o zerowej wartości oczekiwanej i takiej samej, nieznanej wariancji σ^2.

Wnioskowanie o nieznanych parametrach modelu $\mu, \alpha_1, \dots, \alpha_K, \beta_1, \dots, \beta_T, \sigma^2$ opieramy na następujących średnich z próbki:

- $\bar{X}_{\bullet\bullet} = \frac{1}{KT}\sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T} X_{k,t}$,
- $\bar{X}_{k\bullet} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_{k,t}, \quad k = 1,2,\dots,K$,
- $\bar{X}_{\bullet t} = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} X_{k,t}, \quad t = 1,2,\dots,T$,

oraz na sumach kwadratów odchyleń z próbki:

- $S\varepsilon = \sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T}\left(X_{k,t} - \bar{X}_{k\bullet} - \bar{X}_{\bullet t} + \bar{X}_{\bullet\bullet}\right)^2$,
- $S\alpha = \sum_{k=1}^{K}(\bar{X}_{k\bullet} - \bar{X}_{\bullet\bullet})^2$,
- $S\beta = \sum_{t=1}^{T}(\bar{X}_{\bullet t} - \bar{X}_{\bullet\bullet})^2$

Wybierz zdanie prawidłowo określające związki między zmiennymi losowymi $S\alpha$, $S\beta$ oraz $S\varepsilon$.

(A) Zależności występują dla każdej pary z trzech zmiennych $S\alpha$, $S\beta$ oraz $S\varepsilon$

(B) $S\alpha$ oraz $S\beta$ są zależne, zaś $S\varepsilon$ jest niezależna od każdej z nich

(C) Wszystkie trzy zmienne są niezależne

(D) $S\varepsilon$ oraz $S\beta$ są zależne, zaś $S\alpha$ jest niezależna od każdej z nich

(E) $S\alpha$ oraz $S\varepsilon$ są zależne, zaś $S\beta$ jest niezależna od każdej z nich

Zadanie 2.

Mamy dany ciąg liczb $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ z przedziału $(0,1)$. Rozważmy dwie zmienne losowe:

- Y o rozkładzie dwumianowym i parametrach $(n, \bar{q})$, gdzie $\bar{q} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q_i$
- Z, której warunkowy rozkład (przy danej wartości Q) jest rozkładem dwumianowym z parametrami (n, Q), zaś zmienna Q ma rozkład n-punktowy taki, że $\Pr(Q = q_i) = \frac{1}{n}$, $i = 1,2,\ldots,n$

Wariancje tych dwóch zmiennych związane są równością:

$$var(Z) = var(Y) + a\sum_{i=1}^{n}(q_i - \bar{q})^2$$

Stała a występująca w tej równości wynosi:

(A) n

(B) $n-1$

(C) 1

(D) $\frac{n-1}{n}$

(E) $\frac{n-2}{n}$

Zadanie 3.
Pary zmiennych losowych (N_1, X_1) oraz (N_2, X_2) są niezależne, i oznaczają odpowiednio liczbę i wartość szkód dla dwóch ryzyk. Wartość szkód w obu przypadkach ma złożony rozkład Poisson z parametrami odpowiednio (λ_1, F_1) oraz (λ_2, F_2). Oczekiwane liczby szkód λ_1, λ_2, oraz dystrybuanty F_1, F_2, dane są wzorami:

i	λ_i	$F_i(x)$ dla $x < 1$	$F_i(x)$ dla $x \in [1, 2)$	$F_i(x)$ dla $x \geq 2$
1	3	0	7/10	1
2	1	0	3/10	1

Wobec tego $\mathrm{E}(N_1 + N_2 | X_1 + X_2 = 3)$ wynosi:

(A) 18/8

(B) $19/8$

(C) $20/8$

(D) $21/8$

(E) $22/8$

Zadanie 4.
Łączna wartość szkód *X* ma złożony rozkład ujemny dwumianowy. Liczba szkód ma wartość oczekiwaną równą 1/2 i wariancję równą 2/3. Rozkład wartości pojedynczej szkody:

- ma na przedziale $(0, 5)$ gęstość daną wzorem $f(x) = 0.25 - 0.03x$,
- oraz w punkcie 5 masę prawdopodobieństwa równą 0.125.

Wariancja zmiennej *X* wynosi:

(A) $\frac{25\times13}{96}$

(B) $\frac{25\times15}{96}$

(C) $\frac{25\times17}{96}$

(D) $\frac{25\times19}{96}$

(E) $\frac{25\times21}{96}$

Zadanie 5.
Rozważamy zdyskontowaną na moment początkowy wartość składek pomniejszoną o wartość szkód w klasycznym procesie nadwyżki ubezpieczyciela:

$$B(t) = c\frac{1-\exp(-\delta t)}{\delta} - \sum_{k:T_k \le t} \exp(-\delta T_k) Y_k \text{ , gdzie:}$$

- ct jest sumą składek które napłynęły do momentu t,
- T_k, Y_k to moment wystąpienia i wartość bieżąca k-tej szkody
- $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots T_1, (T_2 - T_1), (T_3 - T_2), \ldots$ są niezależne
- $T_1, (T_2 - T_1), (T_3 - T_2), \ldots$ mają rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 0.01
- $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ mają rozkład o momentach równych: $\mathrm{E}(Y_1) = 1$, $\mathrm{E}(Y_1^2) = 3$
- $\delta = 6\%$ to zakładana przy dyskontowaniu intensywność oprocentowania

Dobierz stałą c tak, aby współczynnik zmienności (odchylenie standardowe podzielone przez wartość oczekiwaną) zmiennej:

$$B(\infty) = \frac{c}{\delta} - \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\delta T_k) Y_k$$

wyniósł 1/4.

(A) 106

(B) $100 + 4\sqrt{3}$

(C) $100 + 6\sqrt{2}$

(D) 112

(E) $100 + 12\sqrt{2}$

Zadanie 6.
Kierowca, którego charakteryzuje wartość q parametru ryzyka Q, zgłasza szkody (jedną lub więcej) w ciągu roku z prawdopodobieństwem q, zaś nie zgłasza szkód z prawdopodobieństwem $p = 1 - q$, przy czym zdarzenia te w kolejnych latach są zdarzeniami niezależnymi. Rozkład parametru ryzyka Q w populacji kierowców jest na przedziale $(0, 1)$ dany gęstością:

$$f_Q(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$$

Zakładamy, że populacja jest zamknięta (starzy kierowcy nie znikają, nowi się nie pojawiają). Kierowcy migrują pomiędzy klasami bardzo prostego, 4-klasowego systemu bonus-malus. W systemie tym każdy kierowca, który w danym roku zgłosił jedną lub więcej szkód, ląduje w roku następnym w klasie pierwszej (z najwyższą składką). Jeśli jednak nie zgłosił żadnej szkody, wtedy:

- Ląduje w klasie drugiej, o ile w danym roku był w klasie pierwszej;
- Ląduje w klasie trzeciej, o ile w danym roku był w klasie drugiej;
- Ląduje w klasie czwartej, o ile w danym roku był w klasie trzeciej lub czwartej.

Wiadomo, że rozkład prawdopodobieństwa na przestrzeni klas dla dowolnego kierowcy w takim systemie bonus-malus stabilizuje się (przestaje zależeć od klasy startowej) po upływie kilku pierwszych lat. Oznaczmy przez p_4 wartość oczekiwaną udziału kierowców przebywających w klasie czwartej w całkowitej liczebności kierowców w tej populacji, po osiągnięciu ww. stabilizacji.
Przyjmijmy, że parametry $(\alpha, \beta) = (2, 8)$. Wobec tego p_4 wynosi:

(A) $22/55$

(B) $24/55$

(C) $26/55$

(D) $28/55$

(E) $30/55$

Zadanie 7.

Rozważamy proces nadwyżki ubezpieczyciela z czasem ciągłym:
$U(t) = u + (c - du)t - S(t)$, gdzie:

- $S(t)$ jest procesem o przyrostach i.i.d., o rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną równą μt i wariancją $\sigma^2 t$,
- d to stopa dywidendy wypłacanej akcjonariuszom od kapitału początkowego u
- $(c - du)$ to intensywność napływu składki pomniejszonej o wypłacaną dywidendę

Podejmujemy równocześnie decyzję na temat pożądanego poziomu kapitału początkowego u oraz intensywności składki c. Wyznaczamy te parametry tak, aby zachować konkurencyjny (jak najniższy) poziom składki c, przy ograniczeniu, iż prawdopodobieństwo ruiny nie może przekroczyć z góry zadanego poziomu ψ.

Przy tych założeniach konkurencyjny poziom intensywności składki wyraża się wzorem:

$$c = \mu + a\sigma$$

Jeśli stopa dywidendy wynosi $d = 6\%$, a dopuszczalne prawdopodobieństwo ruiny $\psi = \exp(-3)$, to parametr a formuły składki przyjmie wartość:

(A) $\frac{6}{10}$

(B) $\frac{3\sqrt{2}}{10}$

(C) $\frac{2\sqrt{3}}{10}$

(D) $\frac{4}{10}$

(E) $\frac{3}{10}$

Zadanie 8.
Ubezpieczyciel prowadzi dwa portfele ubezpieczeń. W każdym z portfeli pojedyncze ryzyko generuje szkody zgodnie ze złożonym procesem Poissona z taką samą intensywnością λ. Portfele różnią się rozkładem wartości pojedynczej szkody i liczbą ryzyk w portfelu (n_1 i n_2 odpowiednio). Stosunkowy narzut na składkę netto dla ryzyk w obu portfelach jest ten sam i wynosi θ. W rezultacie parametry modelu są następujące:

- 1 portfel:

intensywność łączna $n_1\lambda$, rozkład wartości pojedynczej szkody o gęstości $f(y) = 2\exp(-2y)$, składka za jedno ryzyko $(1+\theta)\frac{\lambda}{2}$;

- 2 portfel:

intensywność łączna $n_2\lambda$, rozkład wartości pojedynczej szkody o gęstości $f(y) = 5\exp(-5y)$, składka za jedno ryzyko $(1+\theta)\frac{\lambda}{5}$.

Jeśli wiemy, że funkcja prawdopodobieństwa ruiny ubezpieczyciela jest postaci:

$$\Psi(u) = \frac{2}{3}\exp(-u) + \frac{1}{12}\exp\left(-\frac{5}{2}u\right),$$

to wartości parametrów modelu $\left(\theta,\ \frac{n_1}{n_1+n_2}\right)$ wynoszą:

(A) $\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{7}\right)$

(B) $\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{21}\right)$

(C) $\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{21}\right)$

(D) $\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{21}\right)$

(E) $\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{7}\right)$

Zadanie 9.
Niech N oznacza liczbę szkód zaszłych w ciągu roku z pewnego ubezpieczenia, z czego:

- M to liczba szkód zgłoszonych przed końcem tego roku,
- K to liczba szkód które zostaną zgłoszone w ciągu lat następnych,
- Zachodzi oczywiście $N = M + K$.

Liczba szkód zgłoszonych przed końcem roku:

- $M = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_N$,

jest sumą składników, z których każdy przyjmuje wartość jeden gdy daną szkodę zgłoszono w ciągu roku, zaś zero, gdy zgłoszenie nastąpiło później. Przyjmujemy, że zmienne losowe $N, Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ są niezależne, oraz iż $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ mają taki sam rozkład:

- $\Pr(Z_1 = 1) = 1/2, \quad \Pr(Z_1 = 0) = 1/2.$

Jeśli teraz założymy, że liczba szkód zaszłych w ciągu roku ma rozkład dwumianowy o postaci:

- $\Pr(N = n) = \binom{10}{n}\left(\frac{1}{5}\right)^n\left(\frac{4}{5}\right)^{10-n}, \ \ n = 0,1,2,\ldots,10.$

to warunkowa wartość oczekiwana $\mathrm{E}(K|M = 0)$ wyniesie:

(A) 1

(B) 10/9

(C) 4/3

(D) 5/3

(E) 2

Zadanie 10.

Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki $U(t) = u + ct - S_{N(t)}$, gdzie:

- u to nadwyżka początkowa
- ct to suma składek zgromadzonych do momentu *t*,
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ to łączna wartość szkód zaszłych do momentu *t*,
- proces liczący $N(t)$ oraz wartości poszczególnych szkód $Y_1, Y_2, Y_3, ...$ są niezależne, przy czym:
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
- wartości poszczególnych szkód $Y_1, Y_2, Y_3, ...$ mają ten sam rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej 1
- $c = (1+\theta)\cdot\lambda, \quad \theta > 0$

Wiadomo, że zmienna losowa:

- $L := \sup_{t>0}\{u - U(t)\}$

daje się przedstawić jako zmienna o rozkładzie złożonym:

- $L = l_1 + l_2 + ... + l_N$, $\quad$ ($L = 0$ gdy $N = 0$),

gdzie składnik l_1 jest zmienną określoną w przypadku, gdy nadwyżka spadnie poniżej *u*, i równy jest wtedy:

- $l_1 = u - U(t_1)$, gdzie t_1 jest tym momentem czasu, kiedy po raz pierwszy do takiego spadku doszło.

Jeśli $\theta = 1/5$, oraz $u = 3$, to warunkowa wartość oczekiwana liczby takich spadków, pod warunkiem że nastąpiła ruina:

$$\mathrm{E}(N | L > u)$$

wynosi:

(A) 7

(B) $7\frac{1}{2}$

(C) 8

(D) $8\frac{1}{2}$

(E) 9

Egzamin dla Aktuariuszy z 15 czerwca 2015 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : ....K L U C Z O D P O W I E D Z I...........................

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	C	
2	B	
3	B	
4	E	
5	D	
6	E	
7	A	
8	C	
9	B	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.