

Zadanie 1.

Niech łączna wartość szkód:

$$\bullet W = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N$$

Ma złożony rozkład Poissona. Momenty rozkładu wartości pojedynczej szkody wynoszą:

$$\bullet E(Y_1) = 1/3,$$

$$\bullet E[(Y_1)^2] = 1/3.$$

Wiemy także, że momenty nadwyżki wartości pojedynczej szkody ponad udział własny w wysokości 1 wynoszą:

$$\bullet E[(Y_1 - 1)_+] = 1/24,$$

$$\bullet E\{[(Y_1 - 1)_+]^2\} = 1/12.$$

Niech teraz W_U oznacza łączną wartość szkód uciętych do wysokości udziału własnego wynoszącego dla każdej szkody 1, a więc:

$$\bullet W_U = \min\{Y_1, 1\} + \min\{Y_2, 1\} + \dots + \min\{Y_N, 1\};$$

Wobec tego kwadrat współczynnika zmienności zmiennej W_U , a więc:

$$\frac{\text{var}(W_U)}{[E(W_U)]^2}$$

Wynosi:

(A) $\frac{12}{7E(N)}$

(B) $\frac{96}{49E(N)}$

(C) $\frac{120}{49E(N)}$

(D) $\frac{144}{49E(N)}$

(E) $\frac{24}{7E(N)}$

Zadanie 2.

Niech łączna wartość szkód:

- $W = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N$

Ma złożony rozkład dwumianowy. Liczba szkód N ma rozkład dwumianowy z parametrami $(n, 1/3)$ o wartości oczekiwanej $n/3$. O rozkładzie wartości pojedynczej szkody wiemy, że:

- $E(Y_1) = 15$,
- $E(\min\{Y_1, 10\}) = 6$,
- Oraz iż jego drugi moment jest skończony.

Oznaczmy przez W_U oraz W_R części łącznej wartości szkód W pokrywane przez ubezpieczyciela i reasekuratora, odpowiednio. Zgodnie z warunkami kontraktu mamy:

- $W_U = \min\{Y_1, 10\} + \min\{Y_2, 10\} + \dots + \min\{Y_N, 10\}$;
- $W_R = (Y_1 - 10)_+ + (Y_2 - 10)_+ + \dots + (Y_N - 10)_+$.

Kowariancja tych dwóch części $cov(W_R, W_U)$ wynosi:

- (A) $24n$
- (B) $27n$
- (C) $30n$
- (D) $33n$
- (E) $36n$

Zadanie 3.

Niech T_n oznacza moment zajścia n -tej szkody, w procesie pojawiania się szkód, który startuje w momencie $T_0 = 0$. Ponieważ szkody numerujemy według kolejności zajścia, wobec tego zachodzi $0 < T_1 < T_2 < \dots$.

Likwidacja n -tej szkody następuje w momencie $T_n + D_n$.

Założmy, że zmienne losowe $T_1, D_1, (T_2 - T_1), D_2, (T_3 - T_2), D_3, \dots$:

- są niezależne,
- mają taki sam rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej $\frac{1}{2}$.

Niech $N(t)$ oznacza liczbę szkód zlikwidowanych do momentu t . Wobec tego oczekiwana liczba szkód zlikwidowanych na odcinku czasu $3/2 < t \leq 5/2$, a więc

$$E[N(2.5) - N(1.5)]$$

Wynosi:

- (A) 1.975
- (B) 1.957
- (C) 1.935
- (D) 1.910
- (E) 1.883

Zadanie 4.

Niech:

- N oznacza liczbę roszczeń z jednego wypadku ubezpieczeniowego, zaś:
- T_1, T_2, \dots, T_N oznacza czas, jaki upływa od momentu zajścia wypadku do zgłoszenia roszczenia odpowiednio 1-go, 2-go, ..., N -tego, przy czym numeracja roszczeń od 1-go do N -tego jest całkowicie przypadkowa (porządek liczb T_1, T_2, \dots, T_N jest losowy)

Założmy, że:

- zmienne losowe N, T_1, T_2, T_3, \dots są niezależne,
- zmienne losowe T_1, T_2, T_3, \dots mają identyczny rozkład wykładniczy o gęstości danej dla dodatnich t wzorem: $f(t) = \ln(2) 2^{-t}$, przy czym jednostką pomiaru czasu jest miesiąc
- zmienna losowa N ma rozkład logarytmiczny określony dla $k = 1, 2, 3, \dots$ funkcją prawdopodobieństwa:

$$\Pr(N = k) = \frac{1}{-\ln(2/3)} \frac{(1/3)^k}{k}$$

Niech A oznacza zdarzenie, iż w ciągu pierwszego miesiąca od zajścia wypadku zgłoszono dokładnie jedno roszczenie, a więc iż dokładnie jedna liczba ze zbioru liczb $\{T_1, T_2, \dots, T_N\}$, jest mniejsza lub równa 1.

Prawdopodobieństwo, że z tego wypadku więcej roszczeń już nie będzie:

$$\Pr(N = 1|A)$$

z dobrym przybliżeniem wynosi:

- (A) 0.667
- (B) 0.750
- (C) 0.833
- (D) 0.869
- (E) 0.914

Zadanie 5.

Łączna wartość szkód:

- $X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N,$

ma przy danej wartości λ parametru ryzyka Λ warunkowy rozkład złożony Poissona o oczekiwanej liczbie szkód równej λ oraz rozkładzie wartości pojedynczej szkody danym dla $y \geq 0$ gęstością:

- $f_{Y|\Lambda=\lambda}(y) = \frac{\lambda}{a+b\lambda} \exp\left(-\frac{\lambda}{a+b\lambda} y\right),$ gdzie $a \geq 0,$ oraz $b > 0.$

Parametr ryzyka Λ ma w populacji ubezpieczonych rozkład dany dla $x \geq 0$ gęstością:

- $f_{\Lambda}(x) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x).$

Przyjmijmy wartości parametrów zadania równe:

- $a = 1, b = 10$
- $\alpha = 4, \beta = 40$

Wobec tego różnica:

- $E(N) \cdot E(Y_1) - E(X)$

wynosi:

- (A) 1
- (B) 2/3
- (C) 1/3
- (D) 1/2
- (E) 1/4

Zadanie 6.

Rozważamy proces dyskretny nadwyżki ubezpieczyciela postaci:

$$U_n = u + (c - du)n - \sum_{k=1}^n W_k, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad \text{gdzie:}$$

- $u \equiv U_0$ - to nadwyżka początkowa
- c - to kwota rocznej składki
- d - to stopa dywidendy wypłacanej corocznie akcjonariuszom od kapitału u
- W_1, W_2, W_3, \dots - to niezależne zmienne o takim samym rozkładzie normalnym z parametrami μ_w i σ_w^2 , wyrażające łączne wartości szkód w kolejnych latach

Wyznaczamy równocześnie składkę c oraz kapitał początkowy u w taki sposób, aby składka była jak najniższa, przy warunku, iż prawdopodobieństwo ruiny, a więc zdarzenia, iż:

- dla pewnego $n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ zajdzie $U_n < 0$
- równe jest z góry zadanej liczbie ψ .

W obliczeniach posługujemy się wzorem przybliżonym na prawdopodobieństwo ruiny opartym na aproksymacji procesu U_n ciągłym procesem Wienera o wartościach oczekiwanych i wariancjach rocznych przyrostów takich jak w procesie U_n .

Przy założeniach liczbowych:

$$\psi = 1/100, \quad \mu_w = 1000, \quad \sigma_w^2 = 10000, \quad d = 5\%,$$

najniższa wartość składki c spełniająca ww. warunki znajduje się w przedziale:

- (A) (1030, 1040)
- (B) (1040, 1050)
- (C) (1050, 1060)
- (D) (1060, 1070)
- (E) (1070, 1080)

Zadanie 7.

Rozważamy klasyczny proces nadwyżki ubezpieczyciela:

$$U(t) = u + c \cdot t - S(t)$$

gdzie:

- u – to nadwyżka początkowa,
- $S(t)$ - to skumulowana wartość szkód tworząca złożony proces Poissona z intensywnością λ , z wykładniczymi szkodami o wartości oczekiwanej $1/\beta$
- Parametr intensywności składki wynosi $c = \frac{4\lambda}{3\beta}$

Wiemy, że przy aktualnej wysokości kapitału początkowego u prawdopodobieństwo ruiny $\Psi(u)$ spełnia warunek:

- $\Psi(u) = 1/8$.

Niech zdarzenie A oznacza, iż do ruiny doszło, a więc dla pewnego $t > 0$ zaszedł warunek $U(t) < 0$.

Niech zdarzenie B oznacza, iż do ruiny doszło w tym momencie, w którym po raz pierwszy nadwyżka $U(t)$ spadła poniżej wartości kapitału początkowego u .

Prawdopodobieństwo warunkowe $\Pr(B|A)$ mieści się w przedziale:

- (A) (0.00, 0.01)
- (B) (0.01, 0.02)
- (C) (0.02, 0.03)
- (D) (0.03, 0.04)
- (E) (0.04, 1.00)

Zadanie 8.

W pewnym ubezpieczeniu może dojść co najwyżej do jednej szkody w ciągu roku. Wartość szkody (o ile do niej dojdzie) ma rozkład jednostajny na odcinku $(0,1)$. Ubezpieczony, któremu (niezależnie w kolejnych latach) zdarzają się szkody z prawdopodobieństwem q , wędruje po klasach systemu bonus malus, w którym:

- Po roku ze zgłoszeniem szkody przenosi się do klasy 1
- Po roku bez zgłoszenia przenosi się do klasy 2 (jeśli był w klasie 1) lub do klasy 3 (jeśli był w klasie 2 lub 3).

Gdyby zgłaszał wszystkie szkody które mu się zdarzają, macierz prawdopodobieństw przejść wyglądałaby następująco:

$$\begin{bmatrix} q & p & 0 \\ q & 0 & p \\ q & 0 & p \end{bmatrix}.$$

Niech r_1 , r_2 oraz r_3 oznaczają składkę płaconą przez ubezpieczonego przesuniętego właśnie do klasy 1, 2 lub 3 odpowiednio.

Ponieważ $r_1 > r_2 > r_3$, nasz ubezpieczony postanawia zastosować następującą strategię:

- Zgłasza szkodę, o ile jej wartość przekracza d
 - Szkody nie przekraczające d pokrywa we własnym zakresie;
- przy czym wartość d jest ta sama bez względu na klasę, w której aktualnie przebywa.

Ubezpieczony tak dobiera parametr d , aby wartość oczekiwana całkowitego kosztu (płaconej składki i kosztu samodzielnie pokrywanych szkód) była jak najmniejsza. Bierze przy tym pod uwagę oczekiwany całkowity koszt w pojedynczym, odległym okresie czasu (na tyle, żeby oczekiwaną składkę liczyć w oparciu o graniczny rozkład na przestrzeni klas).

Jeśli składki wynoszą odpowiednio: $r_1 = 0.14$, $r_2 = 0.10$, $r_3 = 0.075$, zaś parametr charakteryzujący naszego ubezpieczonego wynosi $q = 0.1$, to optymalna wartość parametru d wynosi (z dobrym przybliżeniem):

- (A) 0.051
- (B) 0.062
- (C) 0.073
- (D) 0.085
- (E) 0.097

Zadanie 9.

Liczby szkód w kolejnych latach z pojedynczego ryzyka, charakteryzującego się wartością λ parametru ryzyka Λ , są warunkowo niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Poissona z wartością oczekiwaną λ . Rozkład wartości parametru ryzyka Λ w populacji generalnej ryzyka (nieskończonej) ma wartość oczekiwaną i wariancję równą odpowiednio μ_Λ i σ_Λ^2 .

W poprzednim roku mieliśmy portfel złożony z 1000 ryzyk wylosowanych z tej populacji, i wygenerowały one N szkód.

W bieżącym roku będziemy mieć 1100 ryzyk, które wygenerują M szkód, przy czym:

- spośród ryzyk które ubezpieczaliśmy w roku poprzednim 100 losowo dobranych ryzyk opuściło nasz portfel (pozostanie lub opuszczenie portfela nie zależy od liczby wygenerowanych szkód)
- oprócz 900 ryzyk kontynuujących ubezpieczenie w portfelu, 200 ryzyk to ryzyka nowe, przypadkowo wylosowane z pozostałej części populacji.

Założmy, że:

- znamy jedynie łączną liczbę szkód zaszłych w poprzednim roku (nie wiemy, jak ta liczba rozkłada się pomiędzy tych, którzy kontynuują i nie kontynuują ubezpieczenia w roku bieżącym)
- wiemy ponadto, że $\mu_\Lambda = 1/4$ oraz $\sigma_\Lambda^2 = 1/32$.

Dobieramy parametry rzeczywiste a i b predyktora zmiennej losowej M postaci:

- $Pred(M|N) := a + bN$

w taki sposób, aby otrzymać predyktor o najmniejszym błędzie średniokwadratowym wśród predyktorów nieobciążonych tej postaci. Współczynnik b dla tak dobranego predyktora wynosi:

- (A) 9/11
- (B) 1/10
- (C) 2/11
- (D) 1
- (E) 11/10

Zadanie 10.

Niech $X_{t,j}$ oznacza pomiar zmiennej w miesiącu j roku t , $t = 1, 2, \dots, 10$, $j = 1, 2, \dots, 12$.

Zakładamy, że $X_{t,j}$ zawiera składnik wahań sezonowych oraz wahań przypadkowych.

Dokładniej, wahania przypadkowe spełniają założenia:

- $E(X_{t,j} | \mu_j) = \mu_j$
- $\text{var}(X_{t,j} | \mu_j) = s^2$,
- $\text{cov}(X_{t,j}, X_{s,k} | \mu_j, \mu_k) = 0$, jeśli ($j \neq k$ lub $t \neq s$)

zaś wahania sezonowe spełniają założenia:

- $E(\mu_j) = \mu$
- $\text{var}(\mu_j) = a^2$
- $\text{cov}(\mu_j, \mu_k) = 0$, jeśli $j \neq k$

W celu estymacji parametrów sezonowych μ_j posługujemy się współczynnikiem:

$$1 - z := \frac{\frac{1}{10} s^2}{a^2 + \frac{1}{10} s^2}.$$

Nie znamy parametrów a^2 ani s^2 . Estymujemy $(1 - z)$ korzystając z dekompozycji sumy kwadratów odchyleń na wahania wewnątrz-sezonowe i między-sezonowe:

$$1 - \hat{z} := \text{const} \cdot \frac{\sum_{t=1}^{10} \sum_{j=1}^{12} (X_{t,j} - \bar{X}_j)^2}{\sum_{j=1}^{12} (\bar{X}_j - \bar{X})^2}$$

gdzie \bar{X} oraz \bar{X}_j oznaczają odpowiednio średnią ogólną (ze 120 obserwacji) i średnią z obserwacji dotyczących j -tego miesiąca.

Jeśli estymator współczynnika $(1 - z)$ miałby być ilorazem nieobciążonych

estymatorów parametrów $\frac{1}{10} s^2$ oraz $\left(a^2 + \frac{1}{10} s^2\right)$, to stała *const* wynosi:

(A) $\text{const} = \frac{1}{9 \cdot 10}$

(B) $\text{const} = \frac{1}{10 \cdot 10}$

(C) $\text{const} = \frac{1}{10 \cdot 11}$

(D) $\text{const} = \frac{12}{9 \cdot 10 \cdot 11}$

(E) $\text{const} = \frac{11}{9 \cdot 10 \cdot 12}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 30 września 2013 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko :K L U C Z O D P O W I E D Z I.....

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	B	
2	A	
3	B	
4	C	
5	C	
6	D	
7	A	
8	D	
9	B	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.