Zadanie 1.

Ryzyko X ma rozkład z atomami: $\Pr(X = 0) = 0.8$

$\Pr(X = 1) = 0.1$

i gęstością: $f_X(x) = 0.1$ dla $x \in (0; 1)$

Ryzyko Y ma rozkład z atomami: $\Pr(Y = 0) = 0.7$

$\Pr(Y = 2) = 0.1$

i gęstością: $f_Y(x) = 0.1$ dla $x \in (0; 2)$.

Jeśli X i Y są niezależne, to $\Pr(X + Y \in \langle 1; 2 \rangle)$ wynosi:

(A) 0.19

(B) 0.21

(C) 0.23

(D) 0.25

(E) 0.27

Zadanie 2.
Dla pewnego ryzyka wartość pojedynczej szkody ma rozkład określony na zbiorze liczb naturalnych (bez zera), a łączna wartość szkód X ma złożony rozkład Poissona. Składka netto za nadwyżkę łącznej szkody X ponad k dla wybranych wartości k wynosi:

k	3	4	6	7
$\mathrm{E}\left[(X-k)_+\right]$	0.366	0.199	0.057	0.029

Prawdopodobieństwo, iż łączna wartość szkód X wyniesie 4, 5 lub 6 wynosi:

(A) 0.337

(B) 0.309

(C) 0.170

(D) 0.139

(E) brakuje danych do udzielenia jednoznacznej odpowiedzi

Zadanie 3.
Niech T_n oznacza moment zajścia n-tej szkody, w procesie pojawiania się szkód, który startuje w momencie $T_0 = 0$. Ponieważ szkody numerujemy według kolejności zajścia, wobec tego zachodzi $0 < T_1 < T_2 < \dots$.
Likwidacja n-tej szkody następuje w momencie $T_n + D_n$.
Załóżmy, że zmienne losowe $T_1, D_1, (T_2 - T_1), D_2, (T_3 - T_2), D_3, \dots$, są niezależne, przy czym:

- $T_1, (T_2 - T_1), (T_3 - T_2), \dots$ mają taki sam rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej 1/100;
- $D_1, D_2, D_3, \dots$ mają taki sam rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej 1.
- Jednostką pomiaru czasu jest rok.

Niech N_0 oznacza liczbę szkód zaszłych i zlikwidowanych w ciągu pierwszego roku, zaś N_1 liczbę szkód zaszłych w ciągu pierwszego roku, i na koniec tego roku wciąż oczekujących na likwidację.
Wobec tego $cov(N_1, N_0)$ wynosi:

(A) 23.25

(B) -23.25

(C) 46.51

(D) -46.51

(E) 0.00

Zadanie 4.

Likwidacja szkody zaistniałej w miesiącu t następuje w tym samym miesiącu z prawdopodobieństwem $\frac{2}{22}$, a w miesiącu $t+k$ z prawdopodobieństwem $\frac{5}{22}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$. Wartość każdej szkody wynosi 1. W miesiącach t, $t+1$ i $t+2$ zaistniały odpowiednio 88, 110 i 132 szkody. Wyznacz stan rezerwy szkodowej na koniec miesiąca $t+2$, jeśli na początku miesiąca t stan tej rezerwy wynosił 320.

(A) 315

(B) 363

(C) 375

(D) 399

(E) brakuje danych o strukturze wiekowej rezerwy na początku t-tego miesiąca

Zadanie 5.

Łączna wartość szkód *S* ma rozkład złożony geometryczny, z rozkładem wartości pojedynczej szkody Y określonym na zbiorze $\{1, 2, 3, \ldots\}$. Znamy częściowo rozkład łącznej wartości szkód *S*:

k	0	1	2	3	4	5
$\Pr(S = k)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{3}{400}$	$\frac{3}{4000}$	$\frac{4503}{40000}$	$\frac{9003}{400000}$

Wobec tego $\Pr(Y = 5)$ wynosi:

(A) 0.00

(B) 0.10

(C) 0.20

(D) podane informacje są sprzeczne

(E) podane informacje są niewystarczające do udzielenia jednoznacznej odpowiedzi

Zadanie 6.
W modelu nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym nadwyżka początkowa wynosi 2, składka należna za rok wynosi 1, a rozkład łącznej wartości szkód za n-ty rok W_n dany jest dla każdego n wzorem:

$\Pr(W_n = k) = p \cdot q^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, gdzie $p = 1 - q > q > 0$;

W_1, W_2, ... są ponadto niezależne.

Prawdopodobieństwo ruiny wynosi:

(A) 1

(B) $\left(\frac{q}{p}\right)^2$

(C) $\left(\frac{q}{p}\right)^3$

(D) $\left(\frac{q}{p}\right)^4$

(E) $\left(\frac{q}{p}\right)^5$

Zadanie 7.
Proces nadwyżki ubezpieczyciela opisany jest przez klasyczny model:
$U(t) = u + ct - S_{N(t)}$,
gdzie u jest nadwyżką początkową,
ct jest sumą składek zgromadzonych do momentu t,
$N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ jest sumą wypłat, gdzie pojedyncze wypłaty:
X_i są zmiennymi losowymi niezależnymi nawzajem i od procesu $N(t)$, o identycznym rozkładzie wykładniczym z wartością oczekiwaną μ.
Prawdopodobieństwo ruiny oznaczymy przez Ψ:
$\Psi = \Pr(\exists\, t \in (0, \infty),\quad U(t) < 0)$
Rozważmy prawdopodobieństwa ruiny dla trzech następujących zestawów parametrów procesu:
Ψ_1 dla procesu o parametrach: $u_1 = 10$, $c_1 = 2$, $\mu_1 = 1$, $\lambda_1 = 1$
Ψ_2 dla procesu o parametrach: $u_2 = 20$, $c_2 = 8$, $\mu_2 = 2$, $\lambda_2 = 2$
Ψ_3 dla procesu o parametrach: $u_3 = 10$, $c_3 = 4$, $\mu_3 = 2$, $\lambda_3 = 1$
Które z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe?

(A) $\Psi_1 = \Psi_2 > \Psi_3$

(B) $\Psi_1 > \Psi_2 > \Psi_3$

(C) $\Psi_1 = \Psi_2 < \Psi_3$

(D) $\Psi_1 < \Psi_2 = \Psi_3$

(E) $\Psi_3 = \Psi_1$

Zadanie 8.
Łączna wartość szkód S wyraża się wzorem:
$S = X_1 + \cdots + X_N$
gdzie wartości poszczególnych szkód (X_i to wartość i-tej szkody) są zmiennymi losowymi niezależnymi nawzajem oraz od zmiennej N (liczby szkód). Każda ze zmiennych X_i ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 2, zaś N ma rozkład geometryczny z ilorazem postępu 0.5.
$\Pr(S \le 4\ln 5)$ wynosi:

(A) 0.9

(B) 0.8

(C) 0.6

(D) 0.5

(E) 0.3

Wskazówka: Zauważ, że funkcja tworząca momenty zmiennej losowej S jest postaci:

$$p + (1-p)\cdot \frac{a}{a-t}$$

Zadanie 9.
Pewne ryzyko generuje szkody zgodnie z procesem Poissona z parametrem intensywności θ. O parametrze θ zakładamy, że jest on realizacją zmiennej losowej Θ o rozkładzie Gamma $(2,1)$. Niech $N(t)$ oznacza liczbę szkód w czasie od 0 do *t*, zaś $T(t)$ - chwilę wystąpienia pierwszej szkody po momencie *t*.
$E(T(3)-3|N(3)=2)$ wynosi:

(A) 1

(B) $\frac{4}{3}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{3}{2}$

(E) $\frac{2}{3}$

Zadanie 10.
W pewnym rodzaju ubezpieczenia każde ryzyko generuje szkodę (co najwyżej jedną) z takim samym prawdopodobieństwem. Ryzyka generują szkody o wartościach będących dodatnimi zmiennymi losowymi o gęstościach wykładniczych:
$f_{Y|B=\beta}(y) = \beta \cdot e^{-\beta \cdot y}$,
Populacja ryzyk charakteryzuje się jednak dużym zróżnicowaniem skali tych ryzyk, reprezentowanej przez parametr β rozkładu.
Jeśli przyjmiemy, iż rozkład parametru skali w populacji ryzyk ma na półosi dodatniej gęstość:
$g_B(\beta) = e^{-\beta}$,
to dla losowo dobranego ryzyka z populacji, warunkowa wartość oczekiwana szkody (pod warunkiem że do niej dojdzie) wyniesie:

(A) 1

(B) $\frac{3}{2}$

(C) 2

(D) 3

(E) ∞

Egzamin dla Aktuariuszy z 10 marca 2014 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : ....K L U C Z   O D P O W I E D Z I............................

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	D	
2	D	
3	E	
4	C	
5	A	
6	D	
7	C	
8	A	
9	B	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.