Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXX Egzamin dla Aktuariuszy z 23 marca 2015 r.

Część I

Matematyka finansowa

WERSJA TESTU A

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:

....

Czas egzaminu: 100 minut

1. Rozważmy rynek Blacka-Scholesa, ze stopą wolną od ryzyka $r = 5\%$. Na rynku tym w chwili $t = 0$ dostępne są następujące instrumenty:

- niepłacąca dywidendy akcja $\mathcal{A}$ o cenie $S_0^{\mathcal{A}} = 100$ i zmienności $\sigma = 10\%$;
- europejska opcja kupna $O_2^{\mathcal{A}}$ na akcję $\mathcal{A}$, zapadająca w chwili $t = 2$ z ceną wykonania $K = 107$,
- europejska opcja kupna $O_3^{\mathcal{A}}$ na akcję $\mathcal{A}$, zapadająca w chwili $t = 1$ z ceną wykonania $K = 105$.

Firma ABC chce wyemitować 10 zapadających w chwili $t = 3$ europejskich opcji kupna $O_1^{\mathcal{A}}$ o cenie wykonania $K = 110$ na akcję $\mathcal{A}$. W celu zabezpieczenia przyszłych zobowiązań w chwili emisji firma ABC zakupuje (dla wartości ujemnych – sprzedaje):

- c_1 (zakładamy całkowitą podzielność liczby akcji) akcji $\mathcal{A}$,
- c_2 (zakładamy całkowitą podzielność liczby opcji) opcji $O_2^{\mathcal{A}}$,
- c_3 (zakładamy całkowitą podzielność liczby opcji) opcji $O_3^{\mathcal{A}}$.

Stałe c_1, c_2, c_3 dobrane zostały przez firmę ABC w taki sposób, aby:

- parametry greckie gamma oraz vega dla portfela opcji były równe 0,
- parametr grecki delta dla portfela opcji i akcji był równy 0.

Przy takiej strategii inwestycyjnej parametr c_1 wynosi (proszę podać najbliższą wartość):

A) 0.44
B) 0.24
C) 0.04
D) -0.16
E) -0.36

2. W chwili $t = 0$ firma ubezpieczeniowa ABC otrzymała od ubezpieczonego składkę w wysokości $1\ 000\ PLN$. Umowa ubezpieczenia zobowiązuję firmę ABC do wypłaty ubezpieczonemu kwoty $K = 2\ 000\ PLN$ w chwili $t = 10$.

Firma ABC stosuje strategię inwestycyjną, przy której zwrot z inwestycji w roku n opisywany jest przez zmienną losową R_n, której wartość oczekiwana i odchylenie standardowe wynoszą 8%. Przyjmujemy, że zmienne losowe opisujące roczne stopy zwrotu w kolejnych latach są niezależne, a $1 + R_n$ mają rozkład lognormalny.

Prawdopodobieństwo, iż kwota, którą firma ubezpieczeniowa dysponować będzie w chwili $t = 10$ (przed samą wypłatą zobowiązania) będzie mniejsza niż $75\% \cdot K$ wynosi (proszę podać najbliższą wartość):

A) 6.5%
B) 7.5%
C) 8.5%
D) 9.5%
E) 10.5%

3. Rozważmy rynek akcji, na którym spełnione są założenia modelu Black'a-Scholes'a.
Do wyceny akcji $\mathcal{A}$ inwestor stosuje model dwumianowy (t.j. zakłada, że w jednym okresie cena akcji może urosnąć od wartości 1 do wartości $u > 1$ z prawdopodobieństwem p , bądź też spaść do wartości $d < 1$ z prawdopodobieństwem $1 - p$). Inwestor przyjmuje, że $p = \frac{1}{2}$ i kalibruje swój model w taki sposób, aby średnia i wariancja ceny akcji $\mathcal{A}$ po jednym okresie odpowiadała średniej i wariancji ceny akcji $\mathcal{A}$ na rynku Blacka-Scholesa dla długości okresu $\Delta t = \frac{1}{12}$.
Zakładając, że stopa wolna od ryzyka wynosi $r = 5\%$, akcja $\mathcal{A}$ płaci w sposób ciągły dywidendę z intensywnością $q = 0.75\%$, natomiast współczynnik zmienności cen akcji równy jest $\sigma = 5\%$, proszę wyznaczyć wartość $u - 1$ (proszę podać najbliższą wartość).

A) 1.5%
B) 1.6%
C) 1.7%
D) 1.8%
E) 1.9%

4. Przyjmijmy, że na rynku spełnione są założenia modelu Blacka-Scholesa oraz dostępna jest akcja $\mathcal{A}$ niepłacąca dywidendy. Przez $O_t^{\mathcal{A},C}(S_t, K, T)$ oznaczmy europejską opcję kupna na akcję $\mathcal{A}$ o następujących charakterystykach: opcja jest wystawiana w chwili t, cena akcji $\mathcal{A}$ w chwili t wynosi S_t, cena wykonania opcji wynosi K, a opcja wykonywana jest w momencie $T > t$;
a przez $O_t^{\mathcal{A},P}(S_t, K, T)$ – europejską opcję kupna na akcję $\mathcal{A}$ o tych samych parametrach.
Niech $C_N^{\mathcal{A}}(q)$ będzie ceną wystawionego w chwili $t = 0$ przez firmę ABC instrumentu finansowego o następującej charakterystyce:
a) w każdej z chwil $t = 0,1, \dots, N-1$ następuje losowanie określające czy:
 i) kupujący instrument otrzymuje od firmy ABC europejską opcję kupna $O_t^{\mathcal{A},C}(S_t, S_t, N)$, lub
 ii) kupujący instrument wystawia firmie ABC europejską opcję sprzedaży $O_t^{\mathcal{A},P}(S_t, S_t, N)$;
b) w każdej chwili $t = 0,1, \dots, N-1$ prawdopodobieństwo wylosowania scenariusza i) wynosi q, a scenariusza ii) wynosi $1 - q$;
c) losowania są niezależne zarówno od siebie jak i od procesu cen akcji.
Zakładając, iż $S_0 = 100$, roczna stopa wolna od ryzyka wynosi stale $r = 5\%$, a zmienność cen akcji równa jest $\sigma = 0.1$, proszę wyznaczyć wartość $C_{10}^{\mathcal{A}}\left(\frac{1}{2}\right)$. Proszę podać najbliższą wartość.

A) 0
B) 19.7
C) 79.2
D) 116.3
E) 151.4

5. Kredyt hipoteczny jest spłacany ratami płatnymi na końcu każdego roku, w ciągu 30 lat. Rata spłaty kredytu zwiększa się co roku o 2%. Oprocentowanie kredytu jest następujące:

- 10% – w latach $6k + 1$,
- 9% – w latach $6k + 2$,
- 7% – w latach $6k + 3$,
- 8% – w latach $6k + 4$,
- 7.5% – w latach $6k + 5$,
- 8.5% – w latach $6k + 6$,

gdzie $k = 0,1,2,3,4$.

Wiadomo, że spłata kapitału dokonana w 28 racie jest równa 33 990. Proszę obliczyć ile wynosi wartość udzielonego kredytu (proszę podać najbliższą wartość):

A) 320 000
B) 330 000
C) 340 000
D) 350 000
E) 360 000

6. Kredyt o wartości 400 000, oprocentowany na poziomie 8%, spłacany będzie w sposób następujący:

- okres spłaty wynosi 25 lat,
- raty są płatne na końcu każdego roku,
- raty płatne na końcu lat nieparzystych tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 1 000,
- raty płatne na końcu lat parzystych tworzą ciąg geometryczny o ilorazie 0.9.

Wiedząc, że kwota odsetek zapłaconych w 10 racie jest równa 23 991, proszę obliczyć ile wynosi suma pierwszej i drugiej raty (proszę podać najbliższą wartość):

A) 84 900
B) 84 920
C) 84 940
D) 84 960
E) 84 980

7. Spłata kredytu oprocentowanego na poziomie 9% zostanie dokonana w ciągu 30 lat, ratami płatnymi na końcu każdego roku, przy czym:

- w okresie pierwszych 20 lat raty zwiększają się co roku o wartość A,
- w okresie ostatnich 10 lat raty, począwszy od 21 raty, zmniejszają się co roku o wartość A.

Wiedząc, że odsetki zapłacone na końcu 15 roku stanowią 78.19% raty, proszę obliczyć ile wynosi stosunek wartości pierwszej raty do A. Proszę podać najbliższą wartość.

A) 13.0
B) 13.5
C) 14.0
D) 14.5
E) 15.0

8. Terminowe renty odroczone A i B, wypłacają równe raty na końcu każdego roku, w okresie wypłacania renty, przy czym wartość raty renty A jest równa wartości raty renty B.

Wiadomo, że:

- renta A rozpoczyna wypłaty 2 lata wcześniej niż renta B,
- renta B kończy wypłaty 3 lata po zakończeniu wypłat renty A,
- $\lim\limits_{i\to\infty} d(A+B) = 3$, $\lim\limits_{i\to 0} d(A+B) = \frac{89}{13}$, gdzie $d(A+B)$ oznacza duration ciągu płatności generowanego przez obie renty A i B.

Proszę obliczyć stosunek pomiędzy duration renty B i duration renty A tzn. $\frac{d(B)}{d(A)}$, przyjmując, że stopa procentowa wynosi 8%. Proszę podać najbliższą wartość.

A) 1.40
B) 1.42
C) 1.44
D) 1.46
E) 1.48

9. Rozważmy nieskończony ciąg odroczonych rent nieskończonych $a_N, \mathrm{N} \geq 1$. Renta wieczysta a_N startująca w roku $\mathrm{N} \geq 1$ płaci kwotę $1/_{k^2}$ na koniec każdego roku $k \geq$ N. Roczna stopa procentowa $i = 10\%$. Niech $PV(a_N)$ oznacza wartość obecną wypłat renty a_N, wyznaczoną na początek roku 1. Suma wartości obecnych wypłat wszystkich rent, czyli $PV(\sum_1^{+\infty} a_N)$ wynosi (proszę podać najbliższą odpowiedź):

A) 1.00
B) 2.40
C) 10.00
D) 100.00
E) $+\infty$

10. Rozważmy rynek, na którym:

- dostępne są 4 obligacje zerokuponowe o nominale 1, zapadające w chwilach 1, 2, 3, i 4, odpowiednio,
- ceny tych obligacji w chwili 0 wynoszą odpowiednio: $P(0,1) = x, P(0,2) = 0.8455, P(0,3) = 0.7980, P(0,4) = 0.7505$.

Wiadomo, że w chwili 1 wystąpi jeden z trzech możliwych stanów rynku: $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Ceny obligacji w chwili 1, w każdym z tych stanów, są znane i podane w tabeli poniżej (gdzie $P(1,T)$ oznacza cenę w chwili 1 obligacji zapadającej w momencie T).

	ω_1	ω_2	ω_3
$P(1,2)$	0.950	0.900	0.850
$P(1,3)$	0.900	0.850	0.800
$P(1,4)$	0.850	0.800	0.750

Żadne transakcje nie są możliwe między chwilami 0 i 1. Proszę wyznaczyć wartość x, przy której rynek ten jest wolny od arbitrażu, proszę podać najbliższą wartość:

A) 0.81
B) 0.91
C) 0.93
D) 0.95
E) 0.97

Dystrybuanta rozkładu normalnego N(0,1)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

Egzamin dla Aktuariuszy z 23 marca 2015 r.

Matematyka finansowa

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko: ....

Pesel: ....

OZNACZENIE WERSJI TESTU ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	E	
2	B	
3	D	
4	D	
5	B	
6	D	
7	E	
8	D	
9	B	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.