Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXIV Egzamin dla Aktuariuszy z 17 czerwca 2013 r.

Część I

Matematyka finansowa

WERSJA TESTU A

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:

....

Czas egzaminu: 100 minut

1. Rozważamy aktywa A i B o identycznej cenie. Inwestor rozważa następujące scenariusze w zakresie zwrotu z inwestycji w aktywa A i B:

Scenariusz	Prawdopodobieństwo	Zwrot z aktywa A	Zwrot z aktywa B
I	0.3	20%	5%
II	0.2	5%	10%
III	0.5	-10%	20%

Inwestor inwestuje $p\%$ posiadanych środków w aktywo A, a pozostałe środki w aktywo B, wyznaczając $p \in [0,100]$ w taki sposób, aby wariancja stopy zwrotu dla tak skonstruowanego portfela była minimalna. Wyznaczyć oczekiwaną stopę zwrotu przy tak skonstruowanym portfelu. Podać najbliższą wartość.

A) 8.6%

B) 9.6%

C) 10.6%

D) 11.6%

E) 12.6%

2. Na rynku Blacka-Scholesa w chwili $t = 0$ dostępna jest opcja wyboru $\mathcal{O}$ (*chooser option*) na akcję $\mathcal{A}$, niepłacącą dywidendy. Cena opcji $\mathcal{O}$ w chwili $t = 0$ wynosi 10 PLN. Nabywca opcji $\mathcal{O}$ w chwili $t = 1$ ma prawo zadecydować, czy chce, aby była to:

a) europejska opcja sprzedaży na akcję $\mathcal{A}$, czy też

b) europejska opcja kupna na akcję $\mathcal{A}$,

realizowana w chwili $t = 2$ z ceną wykonania 100 PLN. Przez $C_t(\mathcal{A}, T, K)$ oznaczymy cenę w chwili $t < T$ europejskiej opcji kupna na akcję $\mathcal{A}$ o terminie wykonania T i cenie wykonania K. Jeżeli wiemy, że cena akcji $\mathcal{A}$ w chwili $t = 0$ wynosi 97, stopa wolna od ryzyka wynosi 0 oraz $C_0(\mathcal{A}, 1{,}100) = 3$ PLN, to $C_0(\mathcal{A}, 2{,}100)$ równe jest (podać najbliższą wartość):

A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

E) 6

3. Wiadomo, że obecna ($t = 0$) cena akcji S niepłacącej dywidendy wynosi 18.50 PLN. W przeciągu 6 miesięcy cena akcji wzrośnie do kwoty 22.50 PLN lub spadnie do kwoty 15 PLN. Roczna intensywność oprocentowania (model ciągły) jest zadana na poziomie 6%. Obecna cena europejskiej opcji kupna wystawionej na akcję S, o cenie wykonania 20 PLN i terminie wykonania 6 miesięcy, wynosi 1.55 PLN.

Zakładając idealną podzielność aktywów wskaż, które z powyższych stwierdzeń jest prawdziwe:

A) Nie ma możliwości wypracowania zysku arbitrażowego.

B) Można wypracować w chwili $t = 0$ zysk arbitrażowy w kwocie 0.24 PLN zajmując długą pozycję w opcji kupna, sprzedając 0.333 akcji S i zajmując długą pozycję w gotówce w kwocie 4.852 PLN.

C) Można wypracować w chwili $t = 0$ zysk arbitrażowy w kwocie 0.24 PLN zajmując krótką pozycję w opcji kupna, kupując 0.333 akcji S i zajmując krótką pozycję w gotówce w kwocie 4.852 PLN.

D) Można wypracować w chwili $t = 0$ zysk arbitrażowy w kwocie 0.12 PLN zajmując długą pozycję w opcji kupna, sprzedając 0.666 akcji S i zajmując długą pozycję w gotówce w kwocie 10.780 PLN.

E) Można wypracować w chwili $t = 0$ zysk arbitrażowy w kwocie 0.12 PLN zajmując krótką pozycję w opcji kupna, kupując 0.666 akcji S i zajmując krótką pozycję w gotówce w kwocie 10.780 PLN.

4. Inwestor zakupił 10-letnią obligację o nominale 100 PLN i kuponie 8% w skali roku płaconym na koniec każdego półrocza. Obligacja ma wbudowaną opcję przedłużenia (*extendable bond*) o kilku możliwych terminach wykupu w okresie przedłużenia wynoszącym 6 lat. Oznacza to, że w chwili pierwotnego momentu wygaśnięcia (10 lat) emitent może zdecydować o przedłużeniu czasu trwania obligacji, przy utrzymaniu początkowych założeń odnośnie wypłacanego kuponu. Ponadto ma on prawo wyboru momentu zapadalności (wykupu) obligacji w okresie przedłużenia. Możliwe zapadalności mogą przypadać w momentach wypłaty kuponu, przy czym nie jest możliwy wykup obligacji przed upływem pierwotnego, 10-letniego, okresu trwania, jak również, przed upływem tego okresu nie jest znana decyzja emitenta o przedłużeniu i wyborze momentu zapadalności. Wartość wykupu zależy od roku trwania obligacji, w którym nastąpi wykup (przy czym pierwszy rok trwania obligacji rozpoczyna się w momencie emisji $t = 0$ i każdy n-ty rok trwania obligacji rozpoczyna się po wypłacie kuponu należnego za rok $n - 1$):

Rok trwania obligacji	10	11	12	13	14	15	16
Wartość wykupu (PLN)	100.00	118.50	118.50	98.00	98.00	142.00	142.00

Jaką największą cenę może zapłacić inwestor w momencie zakupu ($t = 0$), jeśli chce on osiągnąć stopę dochodowości obligacji co najmniej 12% w skali roku (przy dyskretnej kapitalizacji zgodnej z częstotliwością wypłaty kuponu)? Podać najbliższą wartość.

A) 72.80 PLN
B) 78.34 PLN
C) 79.47 PLN
D) 80.57 PLN
E) 81.05 PLN

5. Bank oferuje produkt oszczędnościowy, który przy możliwości inwestowania w pewien indeks akcji I jednocześnie oferuje minimalną, gwarantowaną wysokość środków w momencie wygaśnięcia. Produkt ten jest jednorocznym kontraktem, który klientowi lokującemu kwotę K wypłaca za rok kwotę:

$$K \cdot \delta \cdot max\left[\frac{I(1)}{I(0)}, 1\right],$$

gdzie: $I(0)$ oznacza wartość indeksu I w chwili zakupu produktu, $I(1)$ wartość tego indeksu za rok, a δ pewną liczbę z przedziału $[0, +\infty)$. Ponadto wiadomo, że w momencie zakupu produktu, bank pobiera marżę w wysokości 1% lokowanej kwoty. Przy następujących parametrach wyznaczyć liczbę δ, tak, aby zysk banku na tym kontrakcie był równy pobranej marży:

- indeks I zawiera wypłaty dywidend, czyli skonstruowany jest przy założeniu, że dywidendy są natychmiast reinwestowane w ten sam indeks,
- $I(0) = 1000$,
- w chwili 0 cena europejskiej opcji kupna na indeks I z ceną wykonania 1000 i terminem wykonania za rok wynosi 120.50,
- roczna intensywność oprocentowania wynosi 5%.

Podać najbliższą odpowiedź:

A) 100.0%
B) 93.3%
C) 92.4%
D) 89.7%
E) 88.8%

6. *Duration* renty $(Da)_{\overline{5|}}$ wynosi 2.26, a renty $(Ia)_{\overline{5|}}$ wynosi 3.59. Stała stopa procentowa w ujęciu rocznym wynosi i. Przy tych założeniach *duration* renty $a_{\overline{5|}}$ wynosi (podać najbliższą odpowiedź):

A) 2.98
B) 2.96
C) 2.94
D) 2.92
E) 2.90

7. Kredyt o wartości K jest spłacany 30 ratami płatnymi na końcu kolejnych lat, w sposób następujący:

- w okresie pierwszych 20 lat raty tworzą malejący ciąg arytmetyczny o wyrazie pierwszym P i różnicy $(-)Q$,
- w okresie ostatnich 10 lat raty tworzą rosnący ciąg arytmetyczny o wyrazie pierwszym $P - 18Q$ i różnicy Q,
- oprocentowanie kredytu wynosi 5%.

Wiedząc, że odsetki zapłacone na końcu 15 roku stanowią 50% raty, obliczyć ile wynosi stosunek K/Q. Podać najbliższą wartość.

A) 280
B) 285
C) 290
D) 295
E) 300

8. Renta wieczysta wypłaca raty na końcu każdego parzystego roku. Wielkość raty wypłacanej na końcu roku $2n + 2$, gdzie $n = 0, 1, 2, \ldots$, wynosi $(n + 1) \cdot (2n + 3)$. Stopa oprocentowania jest równa 1%.

Niech R oznacza zdyskontowaną wartość tej renty na początku pierwszego roku, natomiast M niech będzie maksymalną wartością zdyskontowanej raty. Obliczyć ile wynosi różnica $R - M$. Podać najbliższą wartość.

A) 507 302

B) 507 304

C) 507 306

D) 507 308

E) 507 310

9. Zasady spłacania pożyczki o wartości K, są następujące:

- 25 rat płaconych w odstępach rocznych,
- pierwsza rata zostanie zapłacona po upływie roku od daty otrzymania pożyczki,
- pierwszych 10 rat spełnia warunek, iż począwszy od drugiej raty, każda jest o 1 mniejsza od poprzedniej,
- w przypadku następnych 5 rat, każda rata jest większa od poprzedniej o 2,
- ostatnie 10 rat spełnia warunek, iż każda rata jest o 10% mniejsza od poprzedniej,
- stopa oprocentowania wynosi i.

Wskazać, który z poniższych wzorów wyraża wielkość pierwszej raty.

A) $$\frac{K\cdot i + a_{\overline{10|}} - v^{10}\cdot(2\cdot a_{\overline{5|}} - 3) - v^{15}\cdot\left(3 + 0{,}9\cdot i\cdot\frac{1-(0{,}9\cdot v)^{10}}{i+0{,}1}\right)}{1 + v^{15}\cdot\left(0{,}9\cdot i\cdot\frac{1-(0{,}9\cdot v)^{10}}{i+0{,}1} + 1\right)}$$

B) $$\frac{K\cdot i + a_{\overline{10|}} - v^{10}\cdot(3\cdot a_{\overline{5|}} + 2) + v^{15}\cdot\left(3 - 0{,}9\cdot i\cdot\frac{1-(0{,}9\cdot v)^{10}}{1-0{,}9\cdot v}\right)}{1 + v^{15}\cdot\left(0{,}9\cdot i\cdot\frac{1-(0{,}9\cdot v)^{10}}{1-0{,}9\cdot v} - 1\right)}$$

C) $$\frac{K\cdot i + a_{\overline{10|}} - v^{10}\cdot(2\cdot a_{\overline{5|}} + 3) + v^{15}\cdot\left(3 + 0{,}9\cdot i\cdot\frac{1-(0{,}9\cdot v)^{10}}{1-0{,}9\cdot v}\right)}{1 + v^{15}\cdot\left(0{,}9\cdot i\cdot\frac{1-(0{,}9\cdot v)^{10}}{1-0{,}9\cdot v} - 1\right)}$$

D) $$\frac{K\cdot i + a_{\overline{10|}} - v^{10}\cdot(2\cdot a_{\overline{5|}} + 3) + v^{15}\cdot\left(3 - 0{,}9\cdot i\cdot\frac{1-(0{,}9\cdot v)^{10}}{i+0{,}1}\right)}{1 + v^{15}\cdot\left(0{,}9\cdot i\cdot\frac{1-(0{,}9\cdot v)^{10}}{i+0{,}1} - 1\right)}$$

E) $$\frac{K\cdot i + a_{\overline{10|}} - v^{10}\cdot(3\cdot a_{\overline{5|}} + 2) + v^{15}\cdot\left(3 - 0{,}9\cdot i\cdot\frac{1-(0{,}9\cdot v)^{10}}{1-09\cdot v}\right)}{1 + v^{15}\cdot\left(0{,}9\cdot i\cdot\frac{1-(0{,}9\cdot v)^{10}}{i+0{,}1} - 1\right)}$$

10. Kredyt oprocentowany na poziomie 6% będzie spłacany w okresie 32 lat ratami płatnymi na końcu roku.

W czasie pierwszych 20 lat, spłaty kredytu dokonywane będą w ratach o wartości R, w odstępach 2-letnich, począwszy od końca drugiego roku.

W ostatnich 12 latach kredyt będzie spłacany w ratach o wartości S, płatnych w odstępach 3-letnich, począwszy od końca trzeciego roku tego okresu.

Wiadomo, że kredyt można spłacić ratami płatnymi w tych samych terminach zmieniając ich wartość w sposób następujący:

- w okresie pierwszych 20 lat pierwsza rata jest równa R, a każda następna jest mniejsza od poprzedniej o $0.1 \cdot R$,
- pozostałe raty są zwiększone o 25% w stosunku do wartości pierwotnej.

Wiadomo również, że suma wszystkich zapłaconych odsetek w pierwotnym planie spłaty będzie równa 127 326. Obliczyć wartość S. Podać najbliższą wartość.

A) 34 000

B) 34 500

C) 35 000

D) 35 500

E) 36 000

Egzamin dla Aktuariuszy z 17 czerwca 2013 r.

Matematyka finansowa

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko: ....

Pesel: ....

OZNACZENIE WERSJI TESTU ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	C	
3	C	
4	A	
5	C	
6	E	
7	B	
8	A	
9	D	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.