

**Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy**

**LXIII Egzamin dla Aktuariuszy z 25 marca 2013 r.**

**Część I**

**Matematyka finansowa**

**WERSJA TESTU A**

**Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:**

.....

Czas egzaminu: 100 minut

1. Rozważmy zapadający za 2 lata instrument o następującej funkcji wypłaty:

$$w(S_2) = \begin{cases} 100\,000 \text{ PLN}, & S_2 > 100, \\ 0 \text{ PLN}, & S_2 \leq 100, \end{cases}$$

gdzie  $S_2$  oznacza cenę niepłacącej dywidendy akcji  $S$  na moment zapadalności instrumentu. Przy standardowych założeniach modelu Blacka-Scholesa wycenić ten instrument wiedząc, że:

- roczna intensywność oprocentowania wynosi 0.04,
- roczna zmienność ceny akcji wynosi 20%,
- cena akcji w momencie wyceny instrumentu wynosi 90.

Tak obliczona wartość instrumentu wynosi (podać najbliższą odpowiedź):

- A) 38 000 PLN
- B) 48 000 PLN
- C) 64 000 PLN
- D) 73 000 PLN
- E) 92 000 PLN

2. Na rynku, na którym poziom stopy zerokuponowej (w ujęciu rocznym) nie zależy od okresu do zapadalności, inwestor rozważa zakup 5-letniej obligacji o nominale 1 000 PLN, płacącej roczny kupon w wysokości 5% i posiadającej wbudowaną opcję wcześniejszego wykupu przez emitenta za 3 lata od emisji, ale po płatności trzeciego kuponu, po cenie 1 000 PLN. Opcja ta jest wykonywana przez emitenta zawsze, gdy jest to dla niego korzystne. Inwestor dokonuje wyceny opisanej obligacji przy założeniu, że stopa zerokuponowa za 3 lata ma rozkład jednostajny na przedziale  $[4\%, 8\%]$ . Ponadto wiadomo, że w momencie wyceny stopa zerokuponowa (w ujęciu rocznym) wynosi 6%. Na jaką kwotę, stosując opisany model, inwestor wyceni rozważaną obligację (podać najbliższą odpowiedź)?

- A) 803 PLN
- B) 956 PLN
- C) 958 PLN
- D) 1 000 PLN
- E) 1 044 PLN

3. Rozważmy dwa ciągle strumienie płatności  $\alpha$  i  $\beta$ , o intensywnościach  $\alpha(t) = t$ ,  $t \geq 0$  oraz  $\beta(t) = t^2$ ,  $t \geq 0$ . Intensywność oprocentowania jest stała i wynosi  $\delta > 0$ . Oznaczmy przez  $MacD_\alpha(t, \delta)$  *Macaulay Duration* w chwili  $t$  dla strumienia płatności  $\alpha$ , a przez  $MacD_\beta(t, \delta)$  *Macaulay Duration* w chwili  $t$  dla strumienia płatności  $\beta$ . Wówczas:

- A)  $MacD_\beta(0, \delta)/MacD_\alpha(0, \delta) = \delta$
- B)  $MacD_\alpha(0, \delta)/MacD_\beta(0, \delta) = \delta$
- C)  $MacD_\alpha(0, \delta)/MacD_\beta(0, \delta) = 1$
- D)  $MacD_\beta(0, \delta)/MacD_\alpha(0, \delta) = 2/3$
- E)  $MacD_\alpha(0, \delta)/MacD_\beta(0, \delta) = 2/3$

Wskazówka:

$$MacD(t, i) = (1 + i) \cdot ModD(t, i) = (1 + i) \cdot \frac{-1}{P(t, i)} \cdot \frac{\partial P(t, i)}{\partial i},$$

gdzie

$$1 + i = e^\delta,$$

a  $P(t, i)$  oznacza wartość obecną strumienia płatności w chwili  $t$  wyznaczoną przy stopie procentowej  $i$ .

4. Niech dany będzie instrument finansowy  $I$  o następujących własnościach:
- (i) Instrument podzielony jest na transze A, B i C. Nabywca może kupić od emitenta udziały w dowolnej transzy. Ceny zakupu jednego udziału w poszczególnych transzach wynoszą odpowiednio  $c_A, c_B, c_C$ .
  - (ii) W ramach instrumentu do nabycia jest 200 udziałów w transzy A, 600 udziałów w transzy B i 200 udziałów w transzy C. Zakładamy, że w momencie emisji wszystkie udziały zostały sprzedane. Każdy z udziałów ma nominal  $N_I = 500\,000$  PLN.
  - (iii) Instrument powiązany jest z dziesięcioma trzyletnimi obligacjami –  $O_1, O_2, \dots, O_{10}$  – wyemitowanymi przez różnych emitentów. Każda z obligacji ma nominal  $N_O = 100\,000\,000$  PLN i płaci na koniec każdego roku kupony w wysokości 5% nominalu, o ile emitent obligacji nie zbankrutował do momentu płatności kuponu. Na koniec okresu inwestycji nie jest zwracany nominal obligacji.
  - (iv) Z kuponów finansowane są płatności dla nabywców udziałów w transzach instrumentu  $I$ . Procedura płatności jest następująca: najpierw realizowane są zobowiązania wobec posiadaczy udziałów w transzy A; następnie, z pozostałych środków, realizowane są zobowiązania wobec posiadaczy udziałów w transzy B; a następnie z reszty środków – w ramach transzy C.
  - (v) O ile nie nastąpiły żadne bankructwa emitentów obligacji posiadacze udziałów w poszczególnych transzach mogą liczyć na następujące wypłaty na koniec poszczególnych lat: w transzy A 5% od kwoty nominalu  $N_I$ , w transzy B 10% od kwoty nominalu  $N_I$ , w transzy C 15% od kwoty nominalu  $N_I$ . Gdyby w efekcie bankructw emitentów obligacji brakowało środków na realizację wypłat w pełnym zakresie, dostępne środki rozdzielane są po równo pomiędzy udziałowców danej transzy, z uwzględnieniem hierarchii opisanej w punkcie (iv).
  - (vi) Emitent instrumentu  $I$  ustala ceny udziałów  $c_A, c_B, c_C$  jako wartość oczekiwaną przyszłych wypłat z tytułu udziału w danej transzy, zdyskontowanych na moment  $t = 0$ . Emitent instrumentu  $I$  przyjmuje, że bankructwa poszczególnych emitentów obligacji są od siebie niezależne. Zakłada także, że w ciągu najbliższych 3 lat prawdopodobieństwo bankructwa emitenta obligacji w okresie jednego roku jest stałe we wszystkich latach i dla wszystkich emitentów i wynosi  $p = 0.2$ . Do dyskontowania emitent instrumentu  $I$  używa stałej rocznej stopy  $i = 0.05$ .

Stosunek  $\frac{c_A}{c_C}$  wynosi (podać najbliższą odpowiedź):

- A) 0.52
- B) 0.60
- C) 0.75
- D) 1.85
- E) 4.60

5. Firma A posiada trzyletnią obligację zerokuponową firmy B o nominale 1000 PLN. Prawdopodobieństwo bankructwa firmy B w okresie  $[i - 1, i)$ , dla  $i = 1, 2, 3$ , wynosi  $p_i = i \cdot 6\%$ . Czynniki dyskontowe w każdym z powyższych okresów równy jest 0.95. W przypadku niewypłacalności firmy B firma A w momencie zapadalności obligacji odzyska 25% nominału.

Firma A, chcąc się zabezpieczyć przed stratami związanymi z niewypłacalnością firmy B, może:

(i) Zakupić w chwili  $t = 0$  od banku instrument CDS (*Credit Default Swap*) na następujących zasadach:

- W przypadku braku niewypłacalności firmy B w okresie  $[i - 1, i)$ , dla  $i = 1, 2, 3$ , w momencie  $t$  firma A płaci bankowi stałą składkę w wysokości  $K \cdot (4 - i)\%$  nominału obligacji.
- W przypadku niewypłacalności firmy B w dowolnej chwili okresu  $[0, 3]$ , w momencie  $t = 3$  bank przejmuje od firmy A obligację wypłacając równocześnie nominal.
- Bank nie pobiera dodatkowej marży.

(ii) Zakupić w chwili  $t = 0$  pewną liczbę trzyletnich europejskich opcji sprzedaży na akcje firmy B. Cena jednej opcji o cenie wykonania 10 PLN wynosi  $X$ . Zakładamy, że w przypadku bankructwa firmy B cena akcji spada do 0 PLN.

Dla firmy A obie strategie mają taki sam koszt (w sensie wartości obecnej) w chwili  $t = 0$ . Wyznaczyć wartość  $X$  (podać najbliższą odpowiedź):

- A) 2.45
- B) 2.75
- C) 3.05
- D) 3.35
- E) 3.65

6. Cena pewnej opcji sprzedaży na akcję  $S$  niepłacącą dywidendy, wyznaczona w oparciu o model Blacka-Scholesa, w chwili  $t = 0$  wynosi  $C = 3$ . Cena akcji  $S$  w chwili  $t = 0$  wynosi 40, natomiast parametr zmienności tej akcji  $\sigma = 0.1$ . Czas do zapadalności opcji to  $T = 1$ . W chwili  $t = 0$  znana jest wartość dwóch parametrów greckich dla tej opcji sprzedaży, a mianowicie:

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = -0.69, \quad \nu = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = 14.11.$$

Oszacować o ile zmieniłaby się cena opcji sprzedaży w przypadku gdyby cena akcji  $S$  nagle wzrosła o 1 (podać najbliższą odpowiedź).

- A) -0.55
- B) -0.65
- C) -0.75
- D) -0.85
- E) -0.95

7. Poniżej przedstawione zostały cztery wzory matematyczne, w których występują wielkości finansowe oznaczone standardowymi symbolami.

- $\frac{d^n}{dv^n}(v^{n-1} \cdot \delta) = \frac{-(1+i) \cdot (n-1)!}{v}$ , gdzie  $\delta$  należy traktować jako funkcję  $v$ ,
- $(\bar{D}\bar{a})_{\overline{n}|} = \frac{n}{\delta^2} - \frac{\bar{a}_{\overline{n}|}}{\delta}$ ,
- $(I^{(m)}a)_{\overline{\infty}|}^{(m)} = \frac{i^{(m)} \cdot d^{(m)}}{m \cdot (i^{(m)} - d^{(m)})}$ ,
- $\sum_{t=1}^n (Ia)_{\overline{t}|} = \frac{\frac{n}{v} - 2 \cdot a_{\overline{n}|} + n \cdot v^n}{i^2}$ .

Ustalić, ile wzorów jest prawdziwych.

- A) 4
- B) 3
- C) 2
- D) 1
- E) 0



8. Renta wieczysta  $R1$ , wypłaca na początku roku  $n$  kwotę  $\frac{1}{((n-1)!)^2}$ , gdzie  $n = 1, 2, 3, \dots$

Niech  $y(v)$  oznacza wartość obecną tej renty obliczoną przy zastosowaniu czynnika dyskontującego  $v$ .

Rozważmy funkcję:  $z(v) = v \cdot y''(v) - y'(v) + y(v)$ .

Funkcja  $z(v)$  wyraża wartość obecną renty wieczystej  $R2$  płatnej na końcu każdego roku, obliczoną również przy zastosowaniu czynnika dyskontującego  $v$ .

Obliczyć różnicę pomiędzy 19- tą i 20- tą ratą (rata 19 – rata 20) renty  $R2$ .

- A)  $\frac{790}{19! \cdot 21!}$   
B)  $\frac{792}{19! \cdot 21!}$   
C)  $\frac{794}{19! \cdot 21!}$   
D)  $\frac{796}{19! \cdot 21!}$   
E)  $\frac{798}{19! \cdot 21!}$

9. Kredyt mieszkaniowy zaciągnięty w kwocie 200 000 spłacany jest ratami płatnymi na końcu każdego roku, w ciągu 25 lat. Rata spłaty kredytu co roku zwiększa się o 1%.

Ile wynosi rata spłaty kredytu zapłacona na końcu pierwszego roku, jeżeli oprocentowanie kredytu jest następujące:

- 8% w latach  $5k + 1$ ,
- 9% w latach  $5k + 2$ ,
- 10% w latach  $5k + 3$ ,
- 7% w latach  $5k + 4$ ,
- 6% w latach  $5k + 5$ ,

gdzie  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ? Podać najbliższą wartość.

- A) 17 400
- B) 17 500
- C) 17 600
- D) 17 700
- E) 17 800

10. Zasady spłaty kredytu o wartości 400 000 są następujące:

- raty spłaty kredytu są płatne na końcu każdego roku, przez okres 20 lat,
- w pierwszym dziesięcioleciu rata płatna na końcu pierwszego roku wynosi  $X$ , a każda kolejna rata jest większa od poprzedniej o 3 000,
- w drugim dziesięcioleciu schemat spłat można przedstawić następująco:  
 $Y, Y-1\ 000, Y-2\ 000, Y-3\ 000, Y-4\ 000, Y-4\ 000, Y-3\ 000, Y-2\ 000, Y-1\ 000, Y,$
- oprocentowanie w pierwszym dziesięcioleciu wynosi 12%, a w drugim 10%,
- różnica między odsetkami zapłaconymi w 7 racie a odsetkami zapłaconymi w 13 racie wynosi 24 720.50.

Obliczyć ile wynosi suma  $X + Y$  (podać najbliższą wartość).

- A) 80 528
- B) 80 628
- C) 80 728
- D) 80 828
- E) 80 928

**Egzamin dla Aktuariuszy z 25 marca 2013 r.****Matematyka finansowa****Arkusz odpowiedzi\***

Imię i nazwisko: .....

Pesel: .....

OZNACZENIE WERSJI TESTU .....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	A	
2	B	
3	E	
4	D	
5	B	
6	B	
7	E	
8	D	
9	A	
10	B	

\* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.