Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LVII Egzamin dla Aktuariuszy z 20 czerwca 2011 r.

Część II

Matematyka ubezpieczeń życiowych

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: ....

Czas egzaminu: 100 minut

Warszawa, 20 czerwca 2011 r.

1. Rozpatrujemy wspólne życie męża (x) i żony (y), przy czym zakładamy, że $T(x)$ oraz $T(y)$ są niezależne. Wiadomo, że

$$\overset{o}{e}_{x:y} = 10 \ , \qquad \mu_x = 0{,}015 \ , \quad \mu_y = 0{,}008 \, .$$

Oblicz przybliżoną wartość $\overset{o}{e}_{x+\frac{1}{12}:y+\frac{1}{12}}$.

(A) 9,9358 (B) 9,9458 (C) 9,9558 (D) 9,9658
(E) 9,9758

2. Rozważmy populację Weibulla zadaną przez funkcję intensywności śmiertelności $\mu_x = \dfrac{x}{700}$. Oblicz przybliżoną wartość wyrażenia

$$\int_0^\infty s(x) \cdot \left(\bar{a}_x - \overset{o}{e}_x \cdot e^{-\delta x} \right) dx$$

dla $\delta = 0{,}02$. Wskaż najbliższą odpowiedź.

(A) 0,07 (B) 0,035 (C) 0 (D) -0,035
(E) -0,07.

3. Rozważamy ciągły model ubezpieczenia rentowego z intensywnością oprocentowania $\delta = 0{,}02$. Dwie osoby w wieku 50 lat pochodzą z dwóch różnych populacji:

(w) pierwsza z populacji wykładniczej z parametrem $\mu = 0{,}05$,

(dM) druga z populacji de Moivre'a z parametrem ω.

Wiadomo, że dla pewnego *n* zachodzi:

$$\bar{a}^{(w)}_{50:\overline{n|}} = \bar{a}^{(dM)}_{50:\overline{n|}} = \bar{a}^{(dM)}_{50}$$

Wskaż wartość parametru ω.

(A)	72,7525	(B)	80,6225	(C)	88,6525
(D)	95,4525	(E)	102,1225		

4. Określamy funkcję $F(x)$ dodatniego wieku x w następujący sposób

$$F(x) = e^{\delta x} E\left(e^{\delta T(x)}\right)$$

gdzie $\delta > 0$ oznacza techniczną intensywność oprocentowania. Wówczas zachodzi tożsamościowo następujący wzór

(A) $F'(x) = \mu_x \left(F(x) - e^{\delta x}\right)$

(B) $F'(x) = \delta F(x)$

(C) $(\mu_x - \delta) F'(x) = \delta \mu_x e^{\delta x}$

(D) $(\mu_x - \delta) F(x) = \mu_x e^{\delta x}$

(E) żaden z powyższych wzorów nie jest prawdziwy.

5. Rozpatrujemy ciągły model ubezpieczenia na życie z intensywnością oprocentowania $\delta = 0{,}03$. Osoby w wieku 40 lat kupują 20-letnie ubezpieczenie ze składką płatną przez cały okres ubezpieczenia. Wiadomo, że dla $x \le 60$ jest to populacja z wykładniczym rozkładem czasu trwania życia z parametrem $\mu = 0{,}02$. Wiadomo również, że w wieku 60 lat połowa ubezpieczonych będzie miała nadwagę (BMI>45) i śmiertelność tych osób opisuje parametr $\tilde{\mu} = 0{,}04$ dla x>60. Osoby bez nadwagi utrzymują śmiertelność na poziomie $\mu = 0{,}02$.
Ubezpieczyciel wykorzystuje fakt, że 40-latkowie nie potrafią przewidzieć swego przyszłego BMI i oferuje im terminowe ubezpieczenie z opcją konwersji na bezterminowe, do wykonania w wieku 60 lat. Opcja zapewnia kontynuację ubezpieczenia na standardowych warunkach, z jednorazową składką odpowiadającą $\mu = 0{,}02$. Ubezpieczyciel przewiduje, że opcję wykorzystają wszyscy 60-latkowie z nadwagą oraz połowa tych, którzy nie mają nadwagi. Podaj, o ile punktów procentowych składka, którą powinien płacić 40-latek za terminowe ubezpieczenie z opcją konwersji, jest wyższa od składki bez opcji. Wskaż najbliższą wartość. Przyjmij, że nie ma rezygnacji z ubezpieczenia w trakcie umowy terminowej.

(A) 11,95 (B) 12,08 (C) 12,21 (D) 12,34
(E) 12,47

6. Rozważamy ubezpieczenie ciągłe ogólnego typu dla (x) z funkcją intensywności składki $\pi(t)$ oraz funkcją świadczenia śmiertelnego $c(t)$. Kontrakt skalkulowany jest na poziomie netto. Parametr $\delta = 0{,}03$ to techniczna intensywność oprocentowania. Wiadomo ponadto, że dla każdego $10 \le t \le 11$ zachodzi związek:

$$\pi(t) - c(t)\mu_{x+t} = 0{,}02V(t) \ .$$

Wówczas dla każdego $10 \le t \le 11$ mamy równość

(A) $$V(t) = V(10)\frac{e^{0{,}05t}}{{}_{t}p_{x+10}}$$

(B) $$V(t) = V(10)\frac{e^{0{,}05(t-10)}}{{}_{t-10}p_{x+10}}$$

(C) $$V(t) = V(10)\frac{e^{0{,}05t}}{{}_{t-10}p_{x+10}}$$

(D) $$V(t) = V(10)\frac{e^{0{,}05(t-10)}}{{}_{t}p_{x+10}}$$

(E) żaden z powyższych wzorów nie opisuje poprawnie ewolucji rezerwy w przedziale $[10, 11]$

7. Rozważamy dyskretny model *n*-letniego ubezpieczenia na życie ze stałą składką, płatną na początku roku przez cały okres ubezpieczenia. Na koniec *k*-tego roku ubezpieczenia (przed zapłaceniem składki za następny rok) ubezpieczyciel obliczył zysk inwestycyjny przypadający ubezpieczonemu i zaproponował dwa równoważne sposoby jego wykorzystania:

1) wzrost sumy ubezpieczenia o $z_1 = 5\%$ bez zmiany przyszłych składek,
2) spadek przyszłych składek o z_2 punktów procentowych bez zmiany sumy ubezpieczenia.

Podaj z_2. Dane są:

$$N_x = 3\,863\,670 \qquad N_{x+k} = 425\,060 \qquad N_{x+n} = 2\,140$$
$$M_x = 39\,320 \qquad M_{x+k} = 19\,710 \qquad M_{x+n} = 510$$

Wskaż najbliższą wartość.

(A) 7,8 (B) 8,7 (C) 14,4 (D) 21,8
(E) 22,6

8. Niech $E(A,B,C)$ oznacza polisę emerytalną dla pary: on (x), ona (y), która wypłaca A na początku każdego roku aż do pierwszej śmierci; potem B co roku do jej śmierci, jeśli on umrze jako pierwszy; albo C co roku do jego śmierci, jeśli ona umrze jako pierwsza. Niech $SJN(A,B,C)$ oznacza składkę jednorazową netto za takie ubezpieczenie emerytalne. Wiadomo, że

$$SJN(5,4,3) = 60, \qquad SJN(7,5,4) = 80, \qquad SJN(8,6,4) = 92$$

Oblicz $SJN(11,7,5)$.

(A) 112 (B) 114 (C) 116 (D) 118
(E) 120

9. Na osobę (x) wystawiono roczną polisę wypłacającą świadczenie na koniec okresu ubezpieczenia. Życie ubezpieczonego jest narażone na trzy niezależne od siebie ryzyka.

Pierwsze jest typowym demograficznym ryzykiem śmierci i osiąga poziom ${}_1^{*}q_x^{(1)} = 0{,}05$.

Drugie wiąże się ze specyficznym schorzeniem ubezpieczonego i wynosi ${}_1^{*}q_x^{(2)} = 0{,}15$.

Trzecie wynika ze szczególnego trybu życia ubezpieczonego i osiąga poziom ${}_1^{*}q_x^{(3)} = 0{,}20$.

Wszystkie trzy ryzyka mają jednostajny rozkład w ciągu roku.

Polisa wypłaca 500 000 zł za śmierć z powodu pierwszego ryzyka lub 100 000 zł za śmierć wywołaną drugim ryzykiem. Śmierć z tytułu trzeciego ryzyka nie jest objęta ubezpieczeniem.

Wyznacz składkę za to ubezpieczenie przy $v = 0{,}95$. Wskaż najbliższą wartość.

(A) 32 350 (B) 34 700 (C) 38 050 (D) 46 700
(E) 50 050

10. Uczestnicy pewnego planu emerytalnego przystępują do planu w wieku 25 lat, a przechodzą na emeryturę w wieku 65 lat. Prawdopodobieństwo, że 25-letni uczestnik dojdzie w planie do emerytury wynosi 0,65 . Plan wystartował w momencie t=0 ze 150 uczestnikami w wieku 25 lat i od tej pory liczba wstępujących rośnie ze stałą intensywnością 3% na rok.

Plan wypłaca każdemu emerytowi taką sama emeryturę z intensywnością 10 000 zł na rok.

Wyznacz intensywność rocznego kosztu normalnego *P(t)* planu emerytalnego dla momentu t=50, jeśli $\delta = 0{,}03$ oraz $\bar{a}_{65} = 14$. Podaj najbliższą wartość.

(A)	18 325 000	(B)	18 375 000	(C)	18 425 000
(D)	18 475 000	(E)	18 525 000		

LVII Egzamin dla Aktuariuszy z 20 czerwca 2011 r.

Matematyka ubezpieczeń życiowych

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....Klucz odpowiedzi................................

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	A	
2	C	
3	B	
4	A	
5	E	
6	B	
7	E	
8	D	
9	A	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.