

Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LCVI Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 26 maja 2026 r.

Zarządzanie ryzykiem zakładu ubezpieczeń

Numer rejestracyjny:

Czas trwania egzaminu: 120 minut

Uwagi

Wartości dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego $N(0,1)$:

x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)
0,01	0,503989	0,41	0,659097	0,81	0,791103	1,21	0,886861	1,61	0,946301	2,01	0,977784	2,41	0,992024
0,02	0,507978	0,42	0,662757	0,82	0,793892	1,22	0,888768	1,62	0,947384	2,02	0,978308	2,42	0,992224
0,03	0,511966	0,43	0,666402	0,83	0,796731	1,23	0,890651	1,63	0,948449	2,03	0,978822	2,43	0,992451
0,04	0,515953	0,44	0,670031	0,84	0,799546	1,24	0,892512	1,64	0,949497	2,04	0,979325	2,44	0,992656
0,05	0,519939	0,45	0,673645	0,85	0,802337	1,25	0,89435	1,65	0,950529	2,05	0,979818	2,45	0,992857
0,06	0,523922	0,46	0,677242	0,86	0,805105	1,26	0,896165	1,66	0,951543	2,06	0,980301	2,46	0,993053
0,07	0,527903	0,47	0,680822	0,87	0,80785	1,27	0,897958	1,67	0,95254	2,07	0,980774	2,47	0,993244
0,08	0,531881	0,48	0,684386	0,88	0,81057	1,28	0,899727	1,68	0,953521	2,08	0,981237	2,48	0,993431
0,09	0,535856	0,49	0,687933	0,89	0,813267	1,29	0,901475	1,69	0,954486	2,09	0,981691	2,49	0,993613
0,1	0,539828	0,5	0,691462	0,9	0,81594	1,3	0,9032	1,7	0,955435	2,1	0,982136	2,5	0,99379
0,11	0,543795	0,51	0,694974	0,91	0,818589	1,31	0,904902	1,71	0,956367	2,11	0,982571	2,51	0,993963
0,12	0,547758	0,52	0,698468	0,92	0,821214	1,32	0,906582	1,72	0,957284	2,12	0,982997	2,52	0,994132
0,13	0,551717	0,53	0,701944	0,93	0,823814	1,33	0,908241	1,73	0,958185	2,13	0,983414	2,53	0,994297
0,14	0,55567	0,54	0,705401	0,94	0,826391	1,34	0,909877	1,74	0,95907	2,14	0,983823	2,54	0,994457
0,15	0,559618	0,55	0,70884	0,95	0,828944	1,35	0,911492	1,75	0,959941	2,15	0,984222	2,55	0,994614
0,16	0,563559	0,56	0,71226	0,96	0,831472	1,36	0,913085	1,76	0,960796	2,16	0,984614	2,56	0,994766
0,17	0,567495	0,57	0,715661	0,97	0,833977	1,37	0,914657	1,77	0,961636	2,17	0,984997	2,57	0,994915
0,18	0,571424	0,58	0,719043	0,98	0,836457	1,38	0,916207	1,78	0,962462	2,18	0,985371	2,58	0,99506
0,19	0,575345	0,59	0,722405	0,99	0,838913	1,39	0,917736	1,79	0,963273	2,19	0,985738	2,59	0,995201
0,2	0,57926	0,6	0,725747	1	0,841345	1,4	0,919243	1,8	0,96407	2,2	0,986097	2,6	0,995339
0,21	0,583166	0,61	0,729069	1,01	0,843752	1,41	0,92073	1,81	0,964852	2,21	0,986447	2,61	0,995473
0,22	0,587064	0,62	0,732371	1,02	0,846136	1,42	0,922196	1,82	0,96562	2,22	0,986791	2,62	0,995604
0,23	0,590954	0,63	0,735653	1,03	0,848495	1,43	0,923641	1,83	0,966375	2,23	0,987126	2,63	0,995731
0,24	0,594835	0,64	0,738914	1,04	0,85083	1,44	0,925066	1,84	0,967116	2,24	0,987455	2,64	0,995855
0,25	0,598706	0,65	0,742154	1,05	0,853141	1,45	0,926471	1,85	0,967843	2,25	0,987776	2,65	0,995975
0,26	0,602568	0,66	0,745373	1,06	0,855428	1,46	0,927855	1,86	0,968557	2,26	0,988089	2,66	0,996093
0,27	0,60642	0,67	0,748571	1,07	0,85769	1,47	0,929219	1,87	0,969258	2,27	0,988396	2,67	0,996207
0,28	0,610261	0,68	0,751748	1,08	0,859929	1,48	0,930563	1,88	0,969946	2,28	0,988696	2,68	0,996319
0,29	0,614092	0,69	0,754903	1,09	0,862143	1,49	0,931888	1,89	0,970621	2,29	0,988989	2,69	0,996427
0,3	0,617911	0,7	0,758036	1,1	0,864334	1,5	0,933193	1,9	0,971283	2,3	0,989276	2,7	0,996533
0,31	0,62172	0,71	0,761148	1,11	0,8665	1,51	0,934478	1,91	0,971933	2,31	0,989556	2,71	0,996636
0,32	0,625516	0,72	0,764238	1,12	0,868643	1,52	0,935745	1,92	0,972571	2,32	0,98983	2,72	0,996736
0,33	0,6293	0,73	0,767305	1,13	0,870762	1,53	0,936992	1,93	0,973197	2,33	0,990097	2,73	0,996833
0,34	0,633072	0,74	0,77035	1,14	0,872857	1,54	0,93822	1,94	0,97381	2,34	0,990358	2,74	0,996928
0,35	0,636831	0,75	0,773373	1,15	0,874928	1,55	0,939429	1,95	0,974412	2,35	0,990613	2,75	0,99702
0,36	0,640576	0,76	0,776373	1,16	0,876976	1,56	0,94062	1,96	0,975002	2,36	0,990863	2,76	0,99711
0,37	0,644309	0,77	0,77935	1,17	0,879	1,57	0,941792	1,97	0,975581	2,37	0,991106	2,77	0,997197
0,38	0,648027	0,78	0,782305	1,18	0,881	1,58	0,942947	1,98	0,976148	2,38	0,991344	2,78	0,997282
0,39	0,651732	0,79	0,785236	1,19	0,882977	1,59	0,944083	1,99	0,976705	2,39	0,991576	2,79	0,997365
0,4	0,655422	0,8	0,788145	1,2	0,88493	1,6	0,945201	2	0,97725	2,4	0,991802	2,8	0,997445

Zadanie 1.

Rozważamy linie biznesowe A i B. Posiadamy następujące informacje:

	Linia A	Linia B
Składka przypisana brutto	10,000	8,000
Współczynnik kosztów	10%	5%
Współczynnik szkodowości	80%	65%
Kapitał ekonomiczny	500	900

- Wolne środki lokowane są w obligacje wolne od ryzyka,
 - stopa wolna od ryzyka wynosi 3% w ciągu roku,
 - składka wpłacana jest w momencie $t=0$,
 - koszty ponoszone są w momencie $t=0$,
 - wszystkie świadczenia wypłacane są w momencie $t=1$,
 - kapitał ekonomiczny uwalniany jest w momencie $t=1$,
 - koszt kapitału wynosi 6% w ciągu roku,
 - pomijamy dyskontowanie i podatki.
- a) Podaj definicje EVA/zysku ekonomicznego i współczynnika RORAC, oraz uzasadnij wykorzystanie tych miar w decyzjach biznesowych (1p).
- b) Wyznacz EVA/zysk ekonomiczny dla linii A i B, oraz wskaż preferowaną linię (2p).
- c) Wyznacz współczynniki RORAC dla linii A i B, oraz wskaż preferowaną linię (2p).

Odpowiedzi:

- a) Ogólne definicje:

$$EVA / \text{zysk ekonomiczny} = \text{zysk operacyjny} - \text{koszt kapitału} \cdot \text{kapitał zaangażowany.}$$

$$RORAC = \frac{\text{Zysk operacyjny}}{\text{kapitał ekonomiczny}}$$

- b) Zakładamy, że cały kapitał zaangażowany jest równy wymaganemu kapitałowi ekonomicznemu. Wyznaczamy miary:

$$EVA_A = (10,000 - 10,000 \cdot 0.1) \cdot 1.03 - 10,000 \cdot 0.8 - 0.06 \cdot 500$$

$$= 1,270 - 30 = 1,240.$$

$$EVA_B = (8,000 - 8,000 \cdot 0.05) \cdot 1.03 - 8,000 \cdot 0.65 - 0.06 \cdot 900$$

$$= 2,628 - 55 = 2,574.$$

Wybieramy linię B¹.

c) Wyznaczamy miary:

$$RORAC_A = \frac{1,270}{500} = 2.54, \quad RORAC_B = \frac{2,628}{900} = 2.92.$$

Wybieramy linię B.

Przykładowa literatura: Rozdział 8.5 w *“Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools”*, revised edition - A. McNeil, R. Frey, P. Embrecht, Princeton, 2015; oraz *“EVA/RAROC vs. MCEV Earnings: A Unification Approach”*, C. Kraus, *The Geneva Papers on Risk and Insurance - Issues and Practice* 38.

¹ W sytuacji, gdy zysk inwestycyjny nie został uwzględniony w obliczeniach, kandydat również otrzymywał komplet punktów.

Zadanie 2.

Rozważamy model wewnętrzny w reżimie Wypłacalność II, w którym rozważamy wyłącznie ryzyko rezerw pochodzące z jednego (poprzedniego) roku szkodowego. Stosujemy model Hertiga rozwoju szkód, w którym skumulowane wypłaty $(C_i, i = 0, \dots, n)$, w przyszłych latach kalendarzowych i , opisane są wzorem: $C_0 = 50$, $C_i = C_{i-1} \cdot e^{X_i}$, gdzie $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ są niezależne oraz

Rok kalendarzowy i	μ_i	σ_i
1 (najbliższy rok kalendarzowy)	0.5	0.25
2	0,4	0.15
3	0.1	0.05

Wartość C_0 opisuje wartość świadczeń już wypłaconych przez ubezpieczyciela w poprzednich latach kalendarzowych. Podane oszacowania (μ_i, σ_i) są oszacowaniami *best estimate* dla rozkładów szkód i nie uwzględniamy błędów estymacji tychże parametrów w ocenie ryzyka rezerw. Na rynku finansowym obserwujemy płaską strukturę terminową i roczna stopa wolna od ryzyka wynosi 0% - nie uwzględniamy więc dyskontowania w poniższych obliczeniach.

- Wyznacz wymóg kapitałowy dla ryzyka rezerw w reżimie Wypłacalność II stosując odpowiednią definicję straty i miarę Value-at-Risk. Wyjaśnij komponenty funkcji straty (3p).
- Wyznacz wartość zobowiązania w reżimie Wypłacalność II, w szczególności wartość najlepszego oszacowania i margines ryzyka. Margines ryzyka wyznacz stosując aproksymację opartą na bieżącej wartości wymogu kapitałowego dla ryzyka rezerw i prognozie BEL w kolejnych latach kalendarzowych. Przyjmij koszt kapitału 6% (2p).

Wskazówka: Niech $X = e^{a+bZ}$ gdzie $Z \sim N(0,1)$. Wtedy $E[X^k] = e^{ak + \frac{1}{2}b^2k^2}$.

Odpowiedzi:

- Stratę w horyzoncie jednorocznym definiujemy jako

$$L_{1YR} = E[C_n|C_1] - E[C_n|C_0].$$

Powyższe wartości oczekiwane opisują najlepsze oszacowania zobowiązania z tytułu szkód niewypłaconych pod warunkiem informacji w danym momencie czasu.

Zachodzi:

$$E[C_n|C_0] = C_0 \cdot \exp\left(\sum_{i=1}^3 \mu_i + 0.5 \cdot \sum_{i=1}^3 \sigma_i^2\right) = 50 \cdot 2.8398,$$

$$E[C_n|C_1] = C_1 \cdot \exp\left(\sum_{i=2}^3 \mu_i + 0.5 \cdot \sum_{i=2}^3 \sigma_i^2\right) = 50 \cdot e^{0.5+0.25 \cdot Z_1} \cdot 1.6694,$$

gdzie $Z_1 \sim N(0,1)$. W konsekwencji, otrzymujemy wymóg kapitałowy w wysokości

$$VaR_{99.5\%}(L_{1YR}) = 50 \cdot (e^{0.5+0.25 \cdot 2.57} \cdot 1.6694 - 2.8398) = 120.0433.$$

b) Wyznaczamy oczekiwane płatności:

Rok kalendarzowy i	Wzór	Wartość
1	$E[C_1 C_0] - C_0$	35.0528
2	$E[C_2 C_0] - E[C_1 C_0]$	43.266
3	$E[C_3 C_0] - E[C_2 C_0]$	13.6728

gdzie korzystamy z własności

$$E[C_j|C_0] = C_0 \cdot \exp\left(\sum_{i=1}^j \mu_i + 0.5 \cdot \sum_{i=1}^j \sigma_i^2\right).$$

Wyznaczamy:

Rok kalendarzowy i	Prognozowany BEL (na początku roku i)	Prognozowany kapitał (na początku roku i)
1	35.0528+43.266+13.6728 =91.9923	120.0433
2	43.266+13.6728 =56.9394	$\frac{56.9394}{91.9923} \cdot 120.0433$ = 74.3018
3	13.6728	$\frac{13.6728}{91.9923} \cdot 120.0433$ = 17.8420

Wartość najlepszego oszacowania zobowiązania wynosi 91.9923, margines ryzyka wynosi

$$6\% \cdot (120.0433 + 74.3018 + 17.8420) = 12.7312.$$

Przykładowa literatura: "Claims run-off uncertainty: the full picture" - M. Merz, M.V. Wüthrich, 2015.

Zadanie 3.

Rozważamy ubezpieczenia odpowiedzialności cywilnej w komunikacyjnym ubezpieczeniu flotowym oraz pojazdów służbowych z limitem odpowiedzialności. Wysokość pojedynczej szkody modelowana jest rozkładem Pareto (Lomax):

$$1 - F_X(x) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^\alpha, \quad x > 0,$$

z parametrami $\alpha = 5$, $\lambda = 1000$. Składka bazowa w ubezpieczeniu z limitem bazowym $L_0 = 500$ per zdarzenie wynosi 300. Rozważamy współczynniki *Increased Limits Factors* w celu wyceny ubezpieczeń z wyższym limitem.

- Wyznacz współczynniki ILF, oraz ich wartości dla limitu $L = 1000$ i $L = 2000$ (3p).
- Podaj definicję współczynnika *Rate-on-Line* stosowanego do wyceny kontraktów reasekuracji nieproporcjonalnej (1p).
- Wyznacz *Rate-on-Line* dla kontraktu 1000 xs 1000 stosując składkę bazową i wyznaczone ILF powyżej (1p).

Wskazówka:

Współczynniki *Increased Limits Factors* definiowane są zgodnie ze wzorem:

$$ILF_{L_0}(L) = \frac{E[\min(X; L)]}{E[\min(X; L_0)]}.$$

Dodatkowo, zachodzi $E[\min(X; x)] = \int_0^x (1 - F_X(u)) du$.

Odpowiedzi:

- Dla $u > 0$, obliczamy:

$$E[\min(X, u)] = \int_0^u (1 - F(x)) dx = \lambda^\alpha \cdot \frac{\lambda^{-\alpha+1} - (\lambda + u)^{-\alpha+1}}{\alpha - 1}.$$

W konsekwencji, otrzymujemy współczynniki:

$$ILF_{L_0}(L) = \frac{\lambda^{-\alpha+1} - (\lambda + L)^{-\alpha+1}}{\lambda^{-\alpha+1} - (\lambda + L_0)^{-\alpha+1}}.$$

Podstawiając parametry rozkładu szkód, wyznaczamy wartości:

$$ILF_{500}(1,000) = 1.1683, \quad ILF_{500}(2,000) = 1.2307.$$

b) Ogólna definicja:

$$ROL = \frac{\text{składka reasekuracyjna}}{\text{limit odpowiedzialności reasekuratora}}$$

c) Wyceniamy pojedynczą szkodę reasekurowaną zgodnie z kontraktem L xs U stosując formułę:

$$\begin{aligned} E[\min(\max(X - U; 0); L)] &= E[\min(X; U + L)] - E[\min(X; U)] \\ &= E[\min(X; L_0)] \cdot (ILF_{L_0}(U + L) - ILF_{L_0}(U)). \end{aligned}$$

W klasycznym modelu kolektywnym, składka reasekuracyjna za kontrakt L xs U wynosi

$$\begin{aligned} E[N] \cdot E[\min(\max(X - U; 0); L)] \\ = E[N] \cdot E[\min(X; L_0)] \cdot (ILF_{L_0}(U + L) - ILF_{L_0}(U)), \end{aligned}$$

gdzie N oznacza liczbę zdarzeń i $E[N] \cdot E[\min(X; L_0)]$ oznacza techniczną składkę bazową w ubezpieczeniu z limitem bazowym. W konsekwencji, składka reasekuracyjna za kontrakt 1000 xs 1000 wynosi

$$300 \cdot (1.2307 - 1.1683) = 18.75.$$

Rate-on-Line wynosi $\frac{18.75}{1,000} = 1.875\%$.

Przykładowa literatura: Rozdziały 2.3.3 7.4.1 w “*Reinsurance: Actuarial and Statistical Aspects*” - H. Albrecher, J. Beirlant, J. Teugels, Wiley, 2017.

Zadanie 4.

Zgodnie z modelem Sharpe'a zachodzi relacja

$$R_a = \alpha_a + r_f + \beta_a * (R_m - r_f) + \varepsilon_a,$$

gdzie

- R_a jest zmienną losową opisującą stopę zwrotu z akcji a ,
- R_m – zmienna losowa opisująca stopę zwrotu z portfela rynkowego i jednocześnie zmienna losowa opisująca rynkowe ryzyko systematyczne,
- r_f – stopa wolna od ryzyka,
- ε_a – niezależna zmienna losowa opisująca ryzyko niesystematyczne dla akcji,
- β_a – współczynnik beta dla akcji opisujący wrażliwość stopy zwrotu akcji na zmiany stopy zwrotu całego rynku,
- α_a – współczynnik alpha dla akcji opisujący systematyczne źródła premii za ryzyko dla akcji poza systematycznym ryzykiem rynkowym.

Parametry zostały oszacowane w oparciu o dane historyczne. Posiadamy następujące informacje nt. spółek notowanych na giełdzie:

Spółka	Wartość rynkowa	Współczynnik beta	Prognozowana premia za ryzyko
A	?	0.9	4.5%
B	?	1.3	3.5%

Prognozowana premia za ryzyko dla portfela rynkowego wynosi 3%. Bieżąca stopa wolna od ryzyka wynosi 2%.

- Wyznacz premie za ryzyko dla akcji spółek stosując klasyczny model CAPM (2p).
- Wyznacz oszacowane współczynniki α_a dla akcji spółek korzystając z podanej prognozowanej premii za ryzyko dla akcji (2p).
- W oparciu o oszacowane wartości α_a zaproponuj i wyjaśnij, w oparciu o teorię rynków finansowych, która ze spółek mogła być przewartościowana historycznie (1p).

Odpowiedzi:

- Stosując klasyczny model CAPM wyznaczamy premie za ryzyko:

$$R_A = 0.9 \cdot 3\% = 2.70\%, \quad R_B = 1.3 \cdot 3\% = 3.90\%.$$

b) Wyznaczamy współczynniki α_a :

$$\alpha_A = 0.0450 - 0.0270 = 0.0180, \quad \alpha_B = 0.035 - 0.0390 = -0.0040.$$

c) Ponieważ $\alpha_B < 0$, jedną z przyczyn może być przewartościowanie spółki B ze względu na zysk jaki wynika z jej ryzyka i zmniejszenie bieżących oczekiwań co do przyszłych zysków z akcji spółki B.

Przykładowa literatura: Rozdziały 5.2 i 5.3 w *“Financial Markets Theory: Equilibrium, Efficiency and Information”*, 2nd edition - E. Barucci, C. Fontana, Springer, 2017.

Zadanie 5.

Rozpatrujemy uproszczony bilans ekonomiczny w reżimie Wyłączalność II. Posiadamy następujące informacje:

Pozycja	Wartość w bilansie	Niezdwersyfikowany wymóg kapitałowy
Obligacje (aktywa)	2000	500
Akcje (aktywa)	500	300
Rezerwy techniczno-ubezpieczeniowe (zobowiązania)	1800 (w tym wartość najlepszego oszacowania 1700 i margines ryzyka 100)	700

Pomijamy dyskontowanie. Zadana jest macierz współczynników korelacji strat jednorocznych związanych ze zmianą wartości obligacji, akcji i rezerw:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.25 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Zapisz funkcję łącznej straty w horyzoncie jednorocznym (1p).
- Wyznacz zdwersyfikowany kapitał wykorzystując metodę wariancji-kowariancji (2p).
- Oceń, czy firma jest wypłacalna w ramach reżimu Wyłączalność II (1p).
- Wyjaśnij, bez przeprowadzania obliczeń, jak zmieni się kondycja finansowa (współczynnik wypłacalności) firmy jeżeli współczynnik korelacji pomiędzy stratami związanych ze zmianą wartości obligacji i rezerw zwiększy się (1p).

Odpowiedzi:

- Definicja łącznej straty:

$$\begin{aligned} \text{Strata} &= -(Wartość \text{ \u015brodk\u00f3w w\u0142asych w momencie } t + h \\ &\quad - \text{warto\u015b\u0107 \u015brodk\u00f3w w\u0142asnych w momencie } t). \\ &= -(Warto\u015b\u0107 \text{ aktyw\u00f3w w momencie } t + h \\ &\quad - \text{warto\u015b\u0107 aktyw\u00f3w w momencie } t) \\ &\quad + (Warto\u015b\u0107 \text{ zobowi\u0105za\u0144 w momencie } t + h \\ &\quad - \text{warto\u015b\u0107 zobowi\u0105za\u0144 w momencie } t). \end{aligned}$$

W naszym przypadku:

$$L = L_{obligacje} + L_{akcje} + L_{rezerwy},$$

gdzie strata z aktyw\u00f3w zdefiniowana jest jako

$$L_{aktywa} = - (\text{Wartość aktywów w momencie } t + h \\ - \text{wartość aktywów w momencie } t),$$

oraz strata z zobowiązań zdefiniowana jest jako

$$L_{zobowiązania} = (\text{Wartość zobowiązań w momencie } t + h \\ - \text{wartość zobowiązań w momencie } t).$$

- b) Definiujemy wektor niezdywersyfikowanych wymogów kapitałowych $\mathbf{x}^T = [500, 300, 700]$ oraz macierz korelacji strat związanych ze zmianami wartości obligacji, akcji i rezerw:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.25 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zdywersyfikowany wymóg kapitałowy wynosi

$$\sqrt{\mathbf{x}^T R \mathbf{x}} = 1,074.7093.$$

- c) Bieżąca wartość nadwyżki aktywów nad zobowiązaniami wynosi $2,500 - 1,800 = 700$ i nie jest wystarczająca do pokrycia wymogu kapitałowego.
- d) Kondycja finansowa firmy pogorszy się ponieważ zmiany wartości obligacji i rezerw są dodatnio skorelowane.

Przykładowa literatura: Rozdziały 2.2 i 8.4 w “*Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*”, revised edition - A. McNeil, R. Frey, P. Embrecht, Princeton, 2015.

Zadanie 6.

Firma ubezpieczeniowa stosuje model wewnętrzny na potrzeby wyznaczenia kapitału ekonomicznego. Rozważamy następujące scenariusze straty łącznej, straty w linii A i straty w linii B, posortowane od największej wartości straty łącznej:

Scenariusz	Strata łączna	Strata A	Strata B
100	380	300	80
99	250	180	70
98	210	150	60
97	195	160	35
96	180	130	50
95	165	125	40
94	155	140	15
93	145	90	55
92	110	65	45
91	90	60	30

- Wyznacz kapitał ekonomiczny na pokrycie straty łącznej stosując miarę Value-at-Risk na poziomie 95% (1p).
- Oceń, czy rozpoznany został efekt dywersyfikacji stosując miarę VaR (2p).
- Wyznacz alokację kapitału ekonomicznego z p. a) do linii A stosując metodę proporcjonalną, tzn. alokując zdywersyfikowany kapitał proporcjonalnie do niezdywersyfikowanych kapitałów w linii A i B (1p).
- Wyznacz alokację kapitału ekonomicznego z p. a) stosując alokację Eulera. Podaj wzór na alokację i wykonaj obliczenia (1p).

Wskazówka: Należy zastosować podstawowe estymatory empiryczne miar populacyjnych.

Odpowiedzi:

- Wybieramy 95-ty scenariusz straty łącznej jako zdywersyfikowany wymóg kapitałowy – 165.
- Wybieramy 95-ty scenariusz straty A jako niezdywersyfikowany wymóg kapitałowy dla linii A – 140, oraz wybieramy 95-ty scenariusz straty B jako niezdywersyfikowany wymóg kapitałowy dla linii B – 45. Efekt dywersyfikacji został rozpoznany ponieważ $165 < 45 + 140$.

- c) Alokacja proporcjonalna zdywersyfikowanego kapitału w wysokości 165 do linii A wynosi

$$165 \cdot \frac{140}{140 + 45} = 124.8648.$$

- d) Alokacja Eulera dla miary ryzyka VaR odbywa się zgodnie regułą:

$$RC(L_i|L) = E[L_i|L = VaR_p(L)].$$

Alokacja Eulera zdywersyfikowanego kapitału w wysokości 165 do linii A wynosi 125.

Przykładowa literatura: Rozdziały 2.3, 8.4 i 8.5 w “*Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*”, revised edition - A. McNeil, R. Frey, P. Embrecht, Princeton, 2015.

Zadanie 7.

Rozważmy 10-letnie ubezpieczenie z funduszem inwestycyjnym ze składką jednorazową i gwarancją minimalnego świadczenia związanego z dożyciem końca trwania ubezpieczenia. Pomijamy w tym zadaniu świadczenie w wyniku zgonu i zakładamy, że prawdopodobieństwo dożycia wynosi 1. Składka w wysokości 100 wpłacana jest na fundusz w momencie $t=0$, którego dynamika opisana jest geometrycznym ruchem Browna zgodnie ze wzorem

$$dS(t) = aS(t)dt + bS(t)dW(t),$$

gdzie $a = 5\%$, $b = 15\%$. Zwroty z funduszu determinują wartość rachunku w ubezpieczeniu. Na końcu każdego roku, z rachunku pobierana jest przez ubezpieczyciela opłata w wysokości 3% wartości rachunku. W momencie końca trwania umowy ubezpieczyciel wypłaca ubezpieczonemu większą z wartości: wartość rachunku lub wpłaconą składkę. Zobowiązanie ubezpieczyciela jest równe świadczeniom płatnym na koniec trwania umowy. Na rynku finansowym obserwujemy płaską strukturę terminową i stopa wolna od ryzyka wynosi 2% w okresie rocznym. Opcje kwotowane na rynku finansowym wyceniane są zgodnie z modelem Blacka-Scholesa. Na rynku finansowym dostępne są rachunek bankowy wolny od ryzyka i fundusz. Nie ma ograniczeń w handlu na rynku finansowym.

- Opisz gwarancję i ryzyko finansowe, na które narażony jest ubezpieczyciel wystawiający powyższą gwarancję (1p).
- Wyznacz wartość zobowiązania w reżimie Wyplacalność II. Wykorzystaj najbliższe wartości z tablic rozkładu normalnego (3p).
- Wyjaśnij, czy przy wskazanych parametrach ubezpieczenia, ubezpieczyciel będzie mógł doskonale zabezpieczyć (replikować) powyższe zobowiązanie inwestując w instrumenty dostępne na rynku finansowym, bez ponoszenia zysków i strat. Jeżeli nie, jak należałoby zmienić parametry ubezpieczenia, aby ubezpieczyciel mógł doskonale zabezpieczyć zobowiązanie (1p).

Wskazówka: wzór Blacka Scholesa dla opcji put:

$$\begin{aligned} \text{Cena opcji put} &= -N(-d_1)S(0) + N(-d_2)Ke^{-rT}, \\ d_1 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(\log\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T \right), \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}. \end{aligned}$$

Odpowiedzi:

- a) Ryzyko finansowe związane jest ze spadkiem wartości rachunku ubezpieczeniowego poniżej gwarantowanej minimalnej stopy zwrotu ze środków zainwestowanych na rynku finansowym.
- b) Załóżmy, że $S(0)=1$. Wtedy $S(T)$ opisuje stopę zwrotu z funduszu w całym okresie trwania umowy. Wartość rachunku F w momencie T dana jest wzorem:

$$F(T) = F(0) \cdot S(T) \cdot (1 - p)^T, \quad F(0) = \text{Składka},$$

gdzie p oznacza opłatę pobieraną z rachunku. Zobowiązanie ma postać

$$\begin{aligned} H &= \max(F(T), F(0)) \\ &= \max(F(0) - F(0) \cdot S(T) \cdot (1 - p)^T, 0) \\ &\quad + F(0) \cdot S(T) \cdot (1 - p)^T \\ &= (1 - p)^T \cdot F(0) \cdot \max\left(\frac{1}{(1 - p)^T} - S(T), 0\right) + F(T). \end{aligned}$$

Wykorzystując wzór Blacka-Scholesa, wartość 1 jednostki opcji put przy parametrach:

$$r = \log(1 + 0.02), \sigma = 0.15, T = 10, K = \frac{1}{(1 - 3\%)^{10}}, S(0) = 1,$$

jest równa 0.2591. Wartość gwarancji wynosi $(1 - 3\%)^{10} \cdot 100 \cdot 0.2591 = 19.1081$. Wartość rachunku wynosi $100 \cdot (1 - 3\%)^{10} = 73.7424$, ponieważ cena $S(T)$ jest równa $S(0)=1$. Wartość zobowiązania jest równa 92.8505.

- c) Ponieważ wartość zobowiązania jest niższa niż wpłacona składka, gwarancję można replikować inwestując na rynku finansowym i stosując strategię delta-hedging.

Przykładowa literatura: Rozdział 18.2 w “*Actuarial Finance – Derivatives, Quantitative Models and Risk Management*” - M. Boudreault, J.F. Renaud, Wiley, 2019.

Zadanie 8.

Firma ubezpieczeniowa posiada zobowiązania w wysokości 200 i 500 z terminami zapadalności 2 i 4 lata. W celu zabezpieczenia zobowiązania rozważa zakup 1, 3 i 5-letniej obligacji zerokuponowych o wartościach wykupu 100. Na rynku finansowym obserwujemy płaską strukturę terminową i roczna stopa wolna od ryzyka wynosi 4%.

- Wyprowadź i zinterpretuj miary duration i convexity dla obligacji zerokuponowej z terminem wykupu T i jednostkową wartością wykupu (2p).
- Firma konstruuje portfel zabezpieczający dopasowując wartości aktywów i zobowiązań, miary duration i convexity dla aktywów i zobowiązań. Zapisz odpowiednie równania pozwalające wyznaczyć liczby obligacji, które powinny być zakupione, nie musisz rozwiązywać układu równań (2p).
- Wyjaśnij, czy powyższa strategia jest strategią zabezpieczającą zmianę wartości zobowiązania ze względu na każdą zmianę stóp procentowych (1p).

Odpowiedzi:

- Cena obligacji kuponowej:

$$PV(i) = \sum_{t=1}^n \frac{CF(t)}{(1+i)^t}$$

Miara duration dla obligacji kuponowej:

$$\frac{dPV(i)}{di} = -\frac{1}{1+i} \sum_{t=1}^n \frac{t \cdot CF(t)}{(1+i)^t}$$

Miara convexity dla obligacji kuponowej:

$$\frac{d^2PV(i)}{di^2} = \frac{1}{(1+i)^2} \sum_{t=1}^n \frac{t \cdot (t+1) \cdot CF(t)}{(1+i)^t}$$

- Niech a oznacza liczbę rocznych obligacji, b – liczbę 3-letnich obligacji, c – liczbę 5-letnich obligacji. Zapisujemy układ równań, gdzie poszczególne równania odzwierciedlają ceny, miary duration i convexity dla obligacji i zobowiązania:

$$\begin{aligned} & \frac{200}{(1+4\%)^2} + \frac{500}{(1+4\%)^4} \\ &= a \cdot \frac{100}{(1+4\%)^1} + b \cdot \frac{100}{(1+4\%)^3} + c \cdot \frac{100}{(1+4\%)^5} \\ & 2 \cdot \frac{200}{(1+4\%)^3} + 4 \cdot \frac{500}{(1+4\%)^5} \\ &= a \cdot 1 \cdot \frac{100}{(1+4\%)^2} + b \cdot 3 \cdot \frac{100}{(1+4\%)^4} + c \cdot 5 \cdot \frac{100}{(1+4\%)^6} \end{aligned}$$

$$6 \cdot \frac{200}{(1 + 4\%)^4} + 20 \cdot \frac{500}{(1 + 4\%)^6}$$
$$= a \cdot 2 \cdot \frac{100}{(1 + 4\%)^3} + b \cdot 12 \cdot \frac{100}{(1 + 4\%)^5} + c \cdot 30 \cdot \frac{100}{(1 + 4\%)^7}$$

- c) Powyższe miary duration i convexity zakładają równoległe zmiany struktury terminowej stóp procentowych. Powyższa strategia jest strategią zabezpieczającą przy (infinitesimalnie) małych równoległych zmianach struktury terminowej stóp procentowych.

Przykładowa literatura: Rozdział 20.4 w “*Actuarial Finance – Derivatives, Quantitative Models and Risk Management*” - M. Boudreault, J.F. Renaud, Wiley, 2019.

Zadanie 9.

- a) Wyjaśnij pojęcia ryzyka śmiertelności i długowieczności (1p).
- b) Scharakteryzuj cztery rodzaje ryzyka śmiertelności i długowieczności związane z poziomem (*level*), zmiennością (*volatility*), trendem (*trend*) i zdarzeniami katastroficznymi (*catastrophe*), w szczególności wskaż kluczowe różnice pomiędzy czynnikami ryzyka *level* vs *volatility*, *volatility* vs *catastrophe* i *level* vs *trend* (4p).

Odpowiedzi:

Rozdział 7.8 w “*Financial Enterprise Risk Management*”, 2nd edition - P. Sweeting, Cambridge, 2017.

Zadanie 10.

W oparciu o Rozporządzenie Delegowane Komisji uzupełniające dyrektywę Wypłacalność II:

- a) Wymień dwie linie biznesowe w ramach zobowiązań z tytułu umów ubezpieczeń innych niż ubezpieczenia na życie (1p).
- b) Wymień dwie linie biznesowe w ramach zobowiązań z tytułu ubezpieczeń na życie (1p).
- c) Wymień jakie rodzaje zobowiązań, oprócz zobowiązań ubezpieczeń na życie i innych niż ubezpieczenia na życie, uwzględniamy jeszcze w ramach wyodrębniania linii biznesowych (1p).
- d) W oparciu o jakie główne kryterium przypisywane są zobowiązania do linii biznesowych (1p).
- e) W jaki sposób przypisywane są zobowiązania z tytułu ubezpieczeń zdrowotnych do linii biznesowych (1p).

Odpowiedź:

Art. 55 i Załącznik 1 w ROZPORZĄDZENIE DELEGOWANE KOMISJI (UE) 2015/35 z dnia 10 października 2014 r. uzupełniające dyrektywę Parlamentu Europejskiego i Rady 2009/138/WE w sprawie podejmowania i prowadzenia działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej (Wypłacalność II).

Sesja egzaminacyjna w dniu 26 maja 2026 r.**Zarządzanie ryzykiem zakładu ubezpieczeń****Arkusz ocen**

Zadanie nr	Punktacja
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	