

Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

XCVI Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 25 maja 2026 r.

Matematyka finansowa

Numer rejestracyjny:

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.

Obecna cena niepłacącej dywidendy akcji Z wynosi 50, natomiast stopa wolna od ryzyka (zakładając kapitalizację ciągłą) równa jest 3%. W tabeli poniżej zaprezentowano ceny 6-miesięcznych opcji kupna dla akcji Z:

Wykonanie	Cena opcji kupna
47	4.12
50	1.68
53	0.61

Inwestor planuje zastosować dwie strategie opcyjne:

- Strategia A: *straddle*, z ceną wykonania 50, a także
- Strategia B: *strangle*, z opcją sprzedaży o cenie wykonania 47 oraz opcją kupna o cenie wykonania 53.

Proszę określić dla jakiego przedziału ceny akcji Z strategia B okaże się lepsza niż strategia A?¹

- (A) Strategia B nigdy nie będzie lepsza niż A
- (B) Strategia B zawsze będzie lepsza niż A
- (C) (48.39 – 51.61)
- (D) (48.24 – 51.76)
- (E) (48.09 – 51.91)

¹ Porównując strategie w terminie zapadalności proszę pamiętać o odpowiedniej kapitalizacji kosztu zakupu opcji (z tytułu zmiany wartości pieniądza w czasie).

Zadanie 2.

Niech B_t będzie procesem Browna oraz $a, b \in \mathbb{R}$. Rozważmy funkcję

$$f(y, s) = e^{ay+bs}.$$

Niech $X_t = f(B_t, t)$. Proszę wskazać równanie, które spełnia proces X_t .

(A) $dX_t = aX_t dB_t + \left(\frac{1}{2}a^2 + b\right) X_t dt$

(B) $dX_t = aX_t dB_t + \left(a + \frac{1}{2}b^2\right) X_t dt$

(C) $dX_t = aX_t dB_t + \left(\frac{1}{2}a + b^2\right) X_t dt$

(D) $dX_t = bX_t dB_t + \left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b\right) X_t dt$

(E) $dX_t = aX_t dB_t + \left(a + \frac{1}{2}b\right) X_t dt$

Zadanie 3.

Inwestor pożycza kwotę $C = 800\,000\text{ PLN}$ na 50 lat przy stałym rocznym oprocentowaniu 4%. Bank proponuje mu dwa schematy spłaty zaciągniętej pożyczki – spłatę za pomocą stałych płatności (schemat 1) lub spłatę za pomocą płatności uwzględniających stałe raty kapitałowe oraz płatność naliczonych w danym okresie odsetek (schemat 2). Niech $I_{k,T}$ oznacza kwoty sumarycznych odsetek zapłaconych w przypadku wyboru schematu k dla $k = 1,2$. Wówczas

$$\frac{I_{1,T} - I_{2,T}}{C}$$

wynosi (proszę podać najbliższą odpowiedź):

- (A) 24.7%
- (B) 26.7%
- (C) 28.7%
- (D) 30.7%
- (E) 32.7%

Zadanie 4.

Jubiler wykorzystuje srebro w swoich wyrobach. Do wyprodukowania jednego zestawu biżuterii jubiler wykorzystuje 1 uncję srebra. Cena biżuterii wynosi 270 PLN plus 25% rynkowej ceny uncji srebra.

Jubiler zakłada, iż za rok cena rynkowa uncji srebra może wynosić:

Cena za rok za uncję	Prawdopodobieństwo
275	0.3
350	0.6
400	0.1

Jubiler zabezpiecza się przed zmianami cen srebra poprzez zakup 1-letniego kontraktu *forward*, pozwalającego ustalić cenę srebra. 1-letnia cena *forward* uncji srebra wynosi 325 PLN. W przypadku zakupu kontraktu jubiler ustali cenę biżuterii na poziomie 270 PLN plus 25% ceny *forward* uncji srebra. Proszę określić o ile wzrośnie średni oczekiwany zysk jubilera na jednym zestawie biżuterii w efekcie zakupu kontraktu *forward* na srebro w stosunku do sytuacji, gdyby takiego kontraktu nie zakupił.

- (A) 0
- (B) 1.6
- (C) 3.6
- (D) 5.6
- (E) 7.6

Zadanie 5.

Niech S_t będzie ceną spot (w chwili t) niepłacącej dywidendy akcji. Proszę wyznaczyć cenę w chwili $t = 0$ kontraktu, który w chwili $t = 1$ wypłaci jego posiadaczowi kwotę $\frac{S_1^3}{S_0}$, wiedząc, iż stopa wolna od ryzyka wynosi 4%, a zmienność cen akcji to 10%.

- (A) $1.116 \cdot S_0^2$
- (B) $1.216 \cdot S_0^2$
- (C) $1.316 \cdot S_0^2$
- (D) $1.416 \cdot S_0^2$
- (E) $1.516 \cdot S_0^2$

Zadanie 6.

Rozważmy model Blacka-Scholesa i niech S_t będzie procesem ceny pewnego niepłacącego dywidendy aktywa A. Zdefiniujmy $Y_k = \frac{S_k}{S_{k-1}} - 1, k = 1, 2, \dots, n$, a także instrument *compound annual ratchet* (CAR), którego wypłata w chwili $T = n$ równa jest:

$$V_T^{CAR} = \prod_1^n (1 + \alpha \cdot \max(Y_k, 0)).$$

Wiedząc, iż stopa wolna od ryzyka równa jest 3%, a zmienność cen akcji wynosi 15%, proszę wyznaczyć cenę instrumentu CAR w chwili 0 dla $T = 10, \alpha = 75\%$ (proszę wskazać najbliższą wartość).

- (A) 1.10
- (B) 1.15
- (C) 1.20
- (D) 1.25
- (E) 1.30

Zadanie 7.

Przyjmijmy założenia modelu Blacka-Scholesa. Wiemy, iż obecna cena pewnej niepłacącej dywidendy akcji A to 35 PLN, zmienność cen akcji wynosi 20%, a stopa wolna od ryzyka 3%. Mając poniższe informacje o parametrach greckich pewnej europejskiej opcji kupna na akcję A:

- $\theta_0 = -1.22476$,
- $\Delta_0 = 0.518959$,
- $\Gamma_0 = 0.032867$,

proszę wyznaczyć cenę opcji (proszę wskazać najbliższą wartość).

- (A) 3.78
- (B) 3.98
- (C) 4.18
- (D) 4.38
- (E) 4.58

Zadanie 8.

PolExport zawarł odroczoną transakcję *swapu* stopy procentowej o stałej kwocie nominalnej 100 000 PLN, w ramach której zamienia zmienną stopę procentową na stałą stopę procentową w ciągu ostatnich trzech lat sześcioletniego *swapu*. W ciągu pierwszych trzech lat nie ma miejsca żadna zamiana stóp procentowych. Zmienna stopa procentowa w każdym rocznym okresie rozliczeniowym jest równa rocznej stopie procentowej spot na początku okresu rozliczeniowego.

Poniższa tabela przedstawia ceny obligacji zero-kuponowych dla kolejnych terminów zapadalności.

Terminy zapadalności	1 rok	2 lata	3 lata	4 lata	5 lat	6 lat
Cena	0,97	0,93	0,88	0,82	0,75	0,67

Proszę wyznaczyć stopę *swapową* (*swap rate*) na ostatnie trzy lata trwania transakcji *swapowej* (proszę podać najbliższą odpowiedź).

- (A) 8.77%
- (B) 8.97%
- (C) 9.17%
- (D) 9.37%
- (E) 9.57%

Zadanie 9.

Natężenie oprocentowania na koncie wynosi $\delta_t = \frac{t^2}{100}$. Inwestor wpłaca na konto 200 PLN w momencie $t = 0$. W momencie $t = 3$ inwestor dodatkowo wpłaca X PLN. W okresie od $t = 3$ do $t = 5$ inwestorowi naliczają się odsetki w wysokości X PLN. Ile pieniędzy na koncie będzie miał inwestor w chwili $t = 5$ (proszę podać najbliższą odpowiedź)?

- (A) 494 PLN
- (B) 497 PLN
- (C) 500 PLN
- (D) 503 PLN
- (E) 506 PLN

Zadanie 10.

Rozważmy dwuokresowe drzewo dwumianowe. Cena akcji niepłacącej dywidendy w $t = 0$ wynosi $S(0) = 100$ PLN. W każdym okresie cena ta może wzrosnąć lub spaść o 20%. Roczna stopa procentowa wynosi 6% (kapitalizacja ciągła).

Na rynku dostępna jest opcja wyboru (*the chooser option*) z terminem zapadalności w $t = 2$, pozwalająca na wybór w $t = 1$ czy opcja jest call czy put. Cena wykonania opcji (*strike price*) wynosi 110 PLN. Proszę wyznaczyć cenę tej opcji (proszę podać najbliższą odpowiedź).

- (A) 20.39
- (B) 20.44
- (C) 20.49
- (D) 20.54
- (E) 20.59

Dystrybuanta rozkładu normalnego $N(0,1)$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 25 maja 2026 r.

Matematyka finansowa

Arkusz odpowiedzi*

Numer rejestracyjny:

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	C	
2	A	
3	D	
4	D	
5	A	
6	E	
7	C	
8	D	
9	A	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.