Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LC Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 27 luty 2024 r.

Zarządzanie ryzykiem zakładu ubezpieczeń

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: ....

Czas trwania egzaminu: 120 minut

Uwagi

Wartości dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego N(0,1):

x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)
0,01	0,503989	0,41	0,659097	0,81	0,79103	1,21	0,886861	1,61	0,946301	2,01	0,977784	2,41	0,992024
0,02	0,507978	0,42	0,662757	0,82	0,793892	1,22	0,888768	1,62	0,947384	2,02	0,978308	2,42	0,99224
0,03	0,511966	0,43	0,666402	0,83	0,796731	1,23	0,890651	1,63	0,948449	2,03	0,978822	2,43	0,992451
0,04	0,515953	0,44	0,670031	0,84	0,799546	1,24	0,892512	1,64	0,949497	2,04	0,979325	2,44	0,992656
0,05	0,519939	0,45	0,673645	0,85	0,802337	1,25	0,89435	1,65	0,950529	2,05	0,979818	2,45	0,992857
0,06	0,523922	0,46	0,677242	0,86	0,805105	1,26	0,896165	1,66	0,951543	2,06	0,980301	2,46	0,993053
0,07	0,527903	0,47	0,680822	0,87	0,80785	1,27	0,897958	1,67	0,95254	2,07	0,980774	2,47	0,993244
0,08	0,531881	0,48	0,684386	0,88	0,81057	1,28	0,899727	1,68	0,953521	2,08	0,981237	2,48	0,993431
0,09	0,535856	0,49	0,687933	0,89	0,813267	1,29	0,901475	1,69	0,954486	2,09	0,981691	2,49	0,993613
0,1	0,539828	0,5	0,691462	0,9	0,81594	1,3	0,9032	1,7	0,955435	2,1	0,982136	2,5	0,99379
0,11	0,543795	0,51	0,694974	0,91	0,818589	1,31	0,904902	1,71	0,956367	2,11	0,982571	2,51	0,993963
0,12	0,547758	0,52	0,698468	0,92	0,821214	1,32	0,906582	1,72	0,957284	2,12	0,982997	2,52	0,994132
0,13	0,551717	0,53	0,701944	0,93	0,823814	1,33	0,908241	1,73	0,958185	2,13	0,983414	2,53	0,994297
0,14	0,55567	0,54	0,705401	0,94	0,826391	1,34	0,909877	1,74	0,95907	2,14	0,983823	2,54	0,994457
0,15	0,559618	0,55	0,70884	0,95	0,828944	1,35	0,911492	1,75	0,959941	2,15	0,984222	2,55	0,994614
0,16	0,563559	0,56	0,71226	0,96	0,831472	1,36	0,913085	1,76	0,960796	2,16	0,984614	2,56	0,994766
0,17	0,567495	0,57	0,715661	0,97	0,833977	1,37	0,914657	1,77	0,961636	2,17	0,984997	2,57	0,994915
0,18	0,571424	0,58	0,719043	0,98	0,836457	1,38	0,916207	1,78	0,962462	2,18	0,985371	2,58	0,99506
0,19	0,575345	0,59	0,722405	0,99	0,838913	1,39	0,917736	1,79	0,963273	2,19	0,985738	2,59	0,995201
0,2	0,57926	0,6	0,725747	1	0,841345	1,4	0,919243	1,8	0,96407	2,2	0,986097	2,6	0,995339
0,21	0,583166	0,61	0,729069	1,01	0,843752	1,41	0,92073	1,81	0,964852	2,21	0,986447	2,61	0,995473
0,22	0,587064	0,62	0,732371	1,02	0,846136	1,42	0,922196	1,82	0,96562	2,22	0,986791	2,62	0,995604
0,23	0,590954	0,63	0,735653	1,03	0,848495	1,43	0,923641	1,83	0,966375	2,23	0,987126	2,63	0,995731
0,24	0,594835	0,64	0,738914	1,04	0,85083	1,44	0,925066	1,84	0,967116	2,24	0,987455	2,64	0,995855
0,25	0,598706	0,65	0,742154	1,05	0,853141	1,45	0,926471	1,85	0,967843	2,25	0,987776	2,65	0,995975
0,26	0,602568	0,66	0,745373	1,06	0,855428	1,46	0,927855	1,86	0,968557	2,26	0,988089	2,66	0,996093
0,27	0,60642	0,67	0,748571	1,07	0,85769	1,47	0,929219	1,87	0,969258	2,27	0,988396	2,67	0,996207
0,28	0,610261	0,68	0,751748	1,08	0,859929	1,48	0,930563	1,88	0,969946	2,28	0,988696	2,68	0,996319
0,29	0,614092	0,69	0,754903	1,09	0,862143	1,49	0,931888	1,89	0,970621	2,29	0,988989	2,69	0,996427
0,3	0,617911	0,7	0,758036	1,1	0,864334	1,5	0,933193	1,9	0,971283	2,3	0,989276	2,7	0,996533
0,31	0,62172	0,71	0,761148	1,11	0,8665	1,51	0,934478	1,91	0,971933	2,31	0,989556	2,71	0,996636
0,32	0,625516	0,72	0,764238	1,12	0,868643	1,52	0,935745	1,92	0,972571	2,32	0,98983	2,72	0,996736
0,33	0,6293	0,73	0,767305	1,13	0,870762	1,53	0,936992	1,93	0,973197	2,33	0,990097	2,73	0,996833
0,34	0,633072	0,74	0,77035	1,14	0,872857	1,54	0,93822	1,94	0,97381	2,34	0,990358	2,74	0,996928
0,35	0,636831	0,75	0,773373	1,15	0,874928	1,55	0,939429	1,95	0,974412	2,35	0,990613	2,75	0,99702
0,36	0,640576	0,76	0,776373	1,16	0,876976	1,56	0,94062	1,96	0,975002	2,36	0,990863	2,76	0,99711
0,37	0,644309	0,77	0,77935	1,17	0,879	1,57	0,941792	1,97	0,975581	2,37	0,991106	2,77	0,997197
0,38	0,648027	0,78	0,782305	1,18	0,881	1,58	0,942947	1,98	0,976148	2,38	0,991344	2,78	0,997282
0,39	0,651732	0,79	0,785236	1,19	0,882977	1,59	0,944083	1,99	0,976705	2,39	0,991576	2,79	0,997365
0,4	0,655422	0,8	0,788145	1,2	0,88493	1,6	0,945201	2	0,97725	2,4	0,991802	2,8	0,997445

Zadanie 1.

Dysponujesz następującymi danymi dla spółki (w ujęciu rocznym):

Współczynnik beta dla akcji spółki	1.5
Stopa zwrotu z portfela rynkowego na rynku, na którym handlowane są akcje spółki	5%
Stopa wolna od ryzyka dla obligacji rządowych	3%

Stosunek kapitału pozyskanego w drodze emisji akcji i obligacji wynosi 1:3 (zgodnie z wartościami rynkowymi). Spółka wyceniana jest jako firma wolna od ryzyka kredytowego, co znajduje odzwierciedlenie w koszcie spłaty zobowiązań z wyemitowanych obligacji. Nie uwzględniamy podatków.

a) Wyznacz koszt kapitału (WACC) dla spółki jako ważony koszt emisji akcji i obligacji. Do wyznaczenia kosztu emisji akcji zastosuj model CAPM (2p).
b) Przy zachowanej strukturze finansowania spółki, oblicz czy spółka powinna realizować nowy projekt inwestycyjny, wiedząc, że spodziewane wpływy są równe 100 PLN i 300 PLN w kolejnych dwóch latach (przychody na koniec roku) w zamian za zainwestowanie 350 PLN (jednorazowy koszt na początku pierwszego roku) (1p).
c) Załóżmy, że stosunek kapitału pozyskanego w drodze emisji akcji i obligacji wynosi 1:1 (zgodnie z wartościami rynkowymi). Wskaż dwa komponenty w metodzie wyliczenia kosztu kapitału WACC z punktu a), które potencjalnie ulegną zmianie i wskaż spodziewany kierunek tych zmian (2p).

Odpowiedzi:

a) Koszt emisji obligacji = 3.00%.
Koszt emisji akcji zgodnie z CAPM = 3%+1.5*(5%-3%) = 6.00%.
WACC = 1/4*6.00%+3/4*3.00% = 3.75%.

b) Zdyskontowana wartość przepływów przy stopie WACC wynosi:

$$-350 + \frac{100}{1+3.75\%} + \frac{300}{(1+3.75\%)^2} = 25.09.$$

Spółka powinna realizować nową inwestycję.

c) Pierwszy komponent: Udziały akcji i obligacji w strukturze finansowania zmienią się.
Drugi komponent: Koszt emisji akcji zmieni się. Spodziewamy się, że premia za ryzyko będzie wyższa dla spółki, dla której udział obligacji w strukturze finansowania działalności jest wyższy, ponieważ narażona jest ona na większe ryzyko obsługi długu i nie spłacenia długu. Dźwignia finansowa powoduje, że akcjonariusze domagają się odpowiednio wyższej stopy zwrotu. Jest to jedna z obserwacji empirycznych, która podważa wykorzystanie modelu CAPM w

praktyce (anomalie CAPM) i wskazuje na konieczność wykorzystania modeli wieloczynnikowych.

Przykładowa literatura: Rozdziały 5.2-5.3 w *"Financial Markets Theory: Equilibrium, Efficiency and Information", 2nd edition - E. Barucci, C. Fontana, Springer, 2017* oraz Rozdziały 8.3, 9.1-9.3 w *"Principles of Corporate Finance", 13th edition – R. Brealey, S. Myers, F. Allen, McGraw Hill, 2020.*

Zadanie 2.

Rozważamy jednoroczne ubezpieczenie z funduszem kapitałowym ze składką jednorazową i gwarancją minimalnego świadczenia związanego z dożyciem końca trwania umowy. Zakładamy, że ubezpieczony dożywa końca trwania umowy i pomijamy ryzyko śmiertelności w tym przykładzie. W momencie t=0 ubezpieczony wpłaca składkę w wysokości 100 PLN. Następnie, w momencie t=0 ubezpieczyciel pobiera opłatę w wysokości x=3% wpłaconej składki, w celu zabezpieczenia gwarancji minimalnego świadczenia. Składka w wysokości 100*(1-x)=97 PLN jest lokowana w fundusz inwestycyjny i wartość inwestycji tworzy wartość rachunku ubezpieczonego. Ubezpieczyciel pobraną opłatę w wysokości 100*x=3 PLN lokuje na rachunku bankowym, na którym zarabia 5% w okresie rocznym. W momencie końca trwania, w chwili t=1, umowy ubezpieczyciel wypłaca ubezpieczonemu większą z wartości: wartość rachunku lub 102% składki wpłaconej na fundusz (składki po potrąceniu wstępnej opłaty). Pomijamy podatki i pozostałe koszty działalności ubezpieczeniowej. Nie ma ograniczeń w handlu na rynku finansowy.

Aktuariusz postanowił wycenić produkt stosując symulacje stochastyczne. Stopy zwrotu z funduszu modelujemy rozkładem lognormalnym, gdzie zakładamy, że logarytm stopy zwrotu ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej 0.06 i odchyleniu standardowym 0.1.

a) Uzupełnij przepływy poniżej i wyznacz wynik techniczny w scenariuszu, w którym stopa zwrotu z funduszu realizuje się na poziomie kwantyla 75% odpowiedniego rozkładu (2p).

Czas	Rachunek ubezpieczonego t	Rachunek ubezpieczonego t+1	Rachunek ubezpieczyciela t+1	Rachunek ubezpieczyciela t+1
t=0	97		3	
Czas	Wartość gwarancji t+1	Wartość świadczenia t+1	Wynik techniczny t+1	
t=0				

b) Ubezpieczyciel stosuje pasywną strategię inwestycyjną zabezpieczania ryzyka finansowego inwestując pobraną opłatę za gwarancję w całości na rachunku bankowym. Wyznacz z jakim prawdopodobieństwem ubezpieczyciel zabezpiecza gwarancję – zapisz końcową formułę bez konieczności wyliczenia wartości (2p).

c) Zaproponuj, bez wykonywania obliczeń, w jaki sposób można zwiększyć prawdopodobieństwo zabezpieczenia gwarancji zmieniając parametry produktu lub strategię inwestycyjną (1p).

Odpowiedzi:

a) Kwantyl rzędu 75% dla stopy zwrotu z rozkładu lognormalnego wynosi $e^{0.06+0.1*(0.6745)} = 1.13$. Przepływy:

Czas	Rachunek ubezpieczonego t	Rachunek ubezpieczonego t+1	Rachunek ubezpieczyciela t	Rachunek ubezpieczyciela t+1
t=0	97	97*1.13 = 110.18	3	3*(1+5%) = 3.15
Czas	Wartość gwarancji t+1	Wartość świadczenia t+1	Wynik techniczny t+1	
t=0	Max(97*1.02-110.18;0) =0	110.18	3.15-0=3.15	

b) Niech *r* oznacza stopę procentową na rachunku bankowym, *S* stopę zwrotu z funduszu inwestycyjnego z rozkładu lognormalnego z parametrami (μ, σ^2), *x* – pobraną opłatę przez ubezpieczyciela, *P* – wpłaconą składkę, *g* – gwarantowaną stopę zwrotu. Wyznaczamy:

$$
\begin{aligned}
&\Pr(P * x * (1+r) > \max(P * (1-x) * (1+g) - P * (1-x) * S; 0)) \\
&= \Pr\left(\frac{x * (1+r)}{(1-x)} > \max(1+g-S; 0)\right) \\
&= \Pr\left(\frac{x * (1+r)}{(1-x)} > \max(1+g-S; 0)\,|S > 1+g\right) * \Pr(S > 1+g) \\
&\quad + \Pr\left(\frac{x * (1+r)}{(1-x)} > \max(1+g-S; 0)\,|S \leq 1+g\right) * \Pr(S \leq 1+g) \\
&= \Pr\left(\frac{x * (1+r)}{(1-x)} > 0|S > 1+g\right) * \Pr(S > 1+g) \\
&\quad + \Pr\left(\frac{x * (1+r)}{(1-x)} > 1+g-S|S \leq 1+g\right) * \Pr(S \leq 1+g) \\
&= \Pr(S > 1+g) + \Pr\left(S > 1+g-\frac{x*(1+r)}{(1-x)}|S \leq 1+g\right) * \Pr(S \leq 1+g) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{\log\left(1+g-\frac{x * (1+r)}{(1-x)}\right) - \mu}{\sigma}\right).
\end{aligned}
$$

Podstawiając parametry dostajemy 77.38%.

c) Możemy zmniejszyć gwarantowaną stopę *g*, zwiększyć opłatę *x*, zastosować dynamiczną strategię inwestycyjną lokując środki z rachunku ubezpieczyciela w fundusz inwestycyjny oraz rachunek bankowy.

Przykładowa literatura: Rozdział 15 w *“Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks”, 3rd edition - D. Dickson, M. Hardy, H. Waters, Cambridge, 2020;* oraz *“EVA/RAROC vs. MCEV Earnings: A Unification Approach”, C. Kraus, The Geneva Papers on Risk and Insurance - Issues and Practice 38.*

Zadanie 3.

Wymień i opisz pięć zadań funkcji aktuarialnej zgodnie z Rozporządzeniem Delegowanym Wypłacalność II (5p).

Odpowiedzi:

Artykuł 272 Rozporządzenia Delegowanego.

Zadanie 4.

a) Wyjaśnij cztery podstawowe metody zarządzania ryzykiem (*reduce, remove, transfer, accept*), w szczególności wskaż jeden przykład dla każdej metody (4p).
b) Wyjaśnij pojęcie *reverse stress testing* (1p).

Odpowiedzi:

Przykładowa literatura:

a) Rozdział 16.1 w *"Financial Enterprise Risk Management", 2nd edition - P. Sweeting, Cambridge, 2017.*
b) Rozdział 3.5.6 w *"Actuarial Aspects of ERM for Insurance Companies", 2016.*

Zadanie 5.

W modelu wewnętrznym rozważamy scenariusze niewypłacalności w ciągu najbliższego roku dwóch reasekuratorów, z którymi podpisano umowy reasekuracji. Niewypłacalność reasekuratorów modelowana jest przy pomocy indykatorów:

$$X = \begin{cases} 0 & z\,pr.\ 0.9, \\ 1 & z\,pr.\,0.1, \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 0 & z\,pr.\ 0.95, \\ 1 & z\,pr.\,0.05, \end{cases}$$

gdzie wartości 1 odpowiada realizacji scenariusza niewypłacalności. Zależność pomiędzy scenariuszami niewypłacalności określona jest kopuły Gumbela:

$$C(u,v) = \exp\{-((-\ln(u))^a + (-\ln(v))^a)^{1/a}\},$$

z parametrem $a = 2$, co odpowiada wsp. Kendalla pomiędzy zmiennymi X i Y na poziomie 50%.

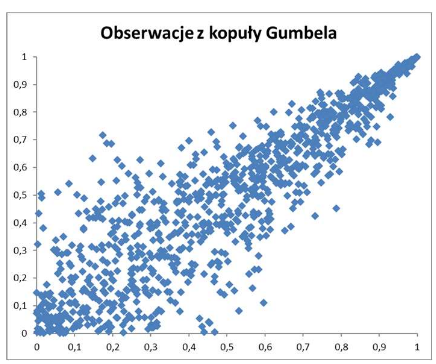
a) Wyznacz prawdopodobieństwo scenariusza, w którym obaj reasekuratorzy tracą wypłacalność w ciągu najbliższego roku (2p).
b) Na wykresie przedstaw przykładowe realizacje obserwacji z kopuły Gumbela i oceń zależności w ogonach (2p).
c) Wyjaśnij, w którym module ryzyka Formuły Standardowej uwzględniłbyś ryzyko niewypłacalności reasekuratorów (1p).

Odpowiedzi:

a) Wyznaczamy:

$$\Pr(X=1, Y=1) = \Pr(X=1) + \Pr(Y=1) - 1 + \Pr(X \leq 0, Y \leq 0)$$
$$= 0.1 + 0.05 - 1 + \exp\left\{-((-\ln(0.9))^2 + (-\ln(0.95))^2)^{\frac{1}{2}}\right\} = 3.94\%.$$

b) Kopuła Gumbela posiada zależność w górnym prawym ogonie:



c) Ryzyko niewypłacalności reasekuratora umieszczamy w module ryzyka niewykonania zobowiązania przez kontrahenta.

Przykładowa literatura: Rozdziały 7.1-7.2 *w "Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools", revised edition - A. McNeil, R. Frey, P. Embrechst, Princeton, 2015.*

Zadanie 6.

Firma ubezpieczeniowa przygotowała bilans w reżimie Wypłacalność II na koniec 2023r. Wyznaczyła wartość najlepszego oszacowania zobowiązań (*best estimate*) równą 200, margines ryzyka (*risk margin*), przy koszcie kapitału 6%, równy 7, kapitałowy wymóg wypłacalności równy 60 oraz wielkość środków własnych (nadwyżka aktywów nad wartość zobowiązań) równą 100. Kapitałowe wymogi wypłacalności są prognozowane w kolejnych latach proporcjonalnie do prognozowanych wartości najlepszego oszacowania zobowiązań. Na rynku finansowym obserwujemy płaską strukturę terminową i stopa wolna od ryzyka wynosi 3% na koniec 2023. Niezdyskontowany przepływ pieniężny w roku 2024 pochodzi z rozkładu normalnego o wartości oczekiwanej 100 i odchyleniu 20 (zakładamy, że przepływ następuje na końcu roku, przed wyceną zobowiązania na koniec 2024). Na koniec roku 2024 okazało się, że przepływ pieniężny w roku 2024 wyniósł 130, zamiast oczekiwanych 100. Aktuariusz postanowił nie zmieniać założeń wyceny, tzn. wartość najlepszego oszacowania zobowiązań, marginesu ryzyka i kapitałowego wymogu wypłacalności na koniec 2024 pokrywa się z oszacowaniami, które zostałyby policzone przy parametrach ustalonych na koniec 2023. Struktura terminowa stóp procentowanych nie zmieniła się.

a) Wyznacz wartość zobowiązań w bilansie na koniec 2023 (1p).
b) Wyznacz wartość najlepszego oszacowania zobowiązań na koniec 2024 (1p).
c) Wyznacz margines ryzyka na koniec 2024 (1p).
d) Wyznacz kapitałowy wymóg wypłacalności na koniec 2024 (1p).
e) Wyznacz wielkość środków własnych na koniec 2024, przyjmując założenie, że aktywa lokowane są w instrumenty wolne od ryzyka (1p).

Odpowiedzi:

a) Wartość zobowiązania na koniec 2023 jest równa 200+7=207.

b) Wartość najlepszego oszacowania wyznaczamy zgodnie ze wzorem:

$$V_0 = \frac{E(C_1) + V_1}{1 + r_f}.$$

Wartość najlepszego oszacowania na koniec 2024 wynosi V_1 =200*(1+3%)-100=106.

c) Wartość marginesu ryzyka wyznaczamy zgodnie ze wzorem:

$$RM_0 = \frac{CoC * SCR(1) + RM_1}{1 + r_f}.$$

Wartość marginesu ryzyka na koniec 2024 wynosi RM_1 =7*(1+3%)-6%*60=3.61.

d) Ponieważ wymogi kapitałowe prognozowane są proporcjonalnie do wartości najlepszego oszacowania, wymóg kapitałowy na koniec 2024 wynosi 60*106/200=31.80.

e) Wartość środków własnych na koniec 2024 wynosi 76.60. Środki własne rosną zgodnie ze stopa zwrotu o wartość 3%*100=3. Środki własne są również powiększane o wartość środków uwalnianą z marginesu ryzyka, czyli 6%*60=3.60. Jednocześnie, środki własne są pomniejszane o różnicę pomiędzy realizacją przepływu a jego oczekiwaną wartością, czyli są pomniejszane o 100-130=30. Wartość środków własnych na koniec 2023 wynosi 100+3+3.60-30=76.60.

<u>Przykładowa literatura:</u> Art. 75-79 i 88 w *DYREKTYWA PARLAMENTU EUROPEJSKIEGO I RADY 2009/138/WE z dnia 25 listopada 2009 r. w sprawie podejmowania i prowadzenia działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej* (Wypłacalność II); oraz art.37 w *DYREKTYWA PARLAMENTU EUROPEJSKIEGO I RADY 2009/138/WE z dnia 25 listopada 2009 r. w sprawie podejmowania i prowadzenia działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej* (Wypłacalność II).

Zadanie 7.

Rozważamy model wewnętrzny, w którym analizujemy wyłącznie ryzyko rezerw pochodzące z jednego roku szkodowego. Rozważamy dwie linie biznesowe $k = 1,2$. Stosujemy model Hertiga rozwoju szkód, w którym skumulowane wypłaty $(C_i^k, i = 0, \dots, n)$ w danej linii biznesowej k w przyszłych latach kalendarzowych i opisane są wzorem: $C_0^k = 100 \cdot k$, $C_i^k = C_{i-1}^k \cdot e^{X_i^k}$, gdzie $X_i^k \sim N(\mu_i^k, (\sigma_i^k)^2)$ są niezależne w obrębie linii biznesowej oraz

Rok kalendarzowy i	μ_i^1	σ_i^1	μ_i^2	σ_i^2
1 (najbliższy rok kalendarzowy)	0.5	0.2	0.7	0.3
2	0,2	0.1	0,4	0.2
3	0.1	0.05	0.1	0.05

Wartość C_0^k opisuje wartość świadczeń już wypłaconych przez ubezpieczyciela w poprzednich latach kalendarzowych. Zakładamy, że w każdym roku rozwoju $i = 1,2,3$, szkody pomiędzy liniami biznesowymi są skorelowane i wsp. korelacji Pearsona wynosi $corr(X_i^1, X_i^2) = 0.5$. Podane oszacowania (μ_i^k, σ_i^k) są oszacowaniami *best estimate* dla rozkładów szkód i nie uwzględniamy błędów estymacji tychże parametrów w ocenie ryzyka rezerw. Na rynku finansowym obserwujemy płaską strukturę terminową i roczna stopa wolna od ryzyka wynosi 0% - nie uwzględniamy więc dyskontowania w poniższych obliczeniach.

a) Zapisz stratę ubezpieczyciela w horyzoncie jednorocznym dla jednej linii biznesowej wykorzystując odpowiednie wyrażenia matematyczne, gdzie strata rozumiana jest jako zmiana wartości zobowiązań ubezpieczeniowych *best estimate* z tytułu szkód niewypłaconych z analizowanego roku szkodowego – wyjaśnij poszczególne komponenty zapisanej straty (2p),
b) Wyznacz kowariancję pomiędzy stratami jednorocznymi dla dwóch linii biznesowych (3p).

Wskazówka: Niech $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Wtedy $E[e^{aX}] = e^{a \cdot \mu + 0.5 \cdot a^2 \cdot \sigma^2}$.

Odpowiedzi:

a) Stratę w horyzoncie jednorocznym definiujemy jako:

$$L_{1YR} = E[C_n|C_1] - E[C_n|C_0].$$

Powyższe wartości oczekiwane opisują najlepsze oszacowania zobowiązania z tytułu szkód niewypłaconych pod warunkiem informacji w danym momencie czasu, który definiujemy horyzont ryzyka. Zauważmy, że

$$E[C_n|C_1] = C_1 * \exp\left(\sum_{i=2}^{3} \mu_i + 0.5 * \sum_{i=2}^{3} \sigma_i^2\right)$$
$$= C_0 * e^{\mu_1 + \sigma_1 * X_1} * \exp\left(\sum_{i=2}^{3} \mu_i + 0.5 * \sum_{i=2}^{3} \sigma_i^2\right),$$

$$= A * e^{\mu_1 + \sigma_1 * X_1},$$

gdzie $X_1 \sim N(0,1)$.

b) Wyznaczamy:

$$cov(L^1_{1YR}, L^2_{1YR})$$

$$= E\left[A^1 * e^{\mu^1_1 + \sigma^1_1 * X^1_1} * A^2 * e^{\mu^2_1 + \sigma^2_1 * X^2_1}\right] - E\left[A^1 * e^{\mu^1_1 + \sigma^1_1 * X^1_1}\right] * E\left[A^2 * e^{\mu^2_1 + \sigma^2_1 * X^2_1}\right]$$

$$= E\left[A^1 * A^2 * e^{\mu^{1+2}_1 + \sigma^{1+2}_1 * X^{1+2}_1}\right] - E\left[A^1 * e^{\mu^1_1 + \sigma^1_1 * X_1}\right] * E\left[A^2 * e^{\mu^2_1 + \sigma^2_1 * X_2}\right],$$

gdzie $\mu^{1+2}_1 = \mu^1_1 + \mu^2_1 = 1.2$, $\sigma^{1+2}_1 = \sqrt{(\sigma^1_1)^2 + (\sigma^2_1)^2 + 2 * \sigma^1_1 * \sigma^2_1 * \rho} = 0.43$ oraz $X^{1+2}_1 \sim N(0,1)$.

Wykorzystując wzór ze wskazówki na momenty w rozkładzie lognormalnym dostajemy:

$$cov(L^1_{1YR}, L^2_{1YR}) = 4{,}936{,}77.$$

<u>Przykładowa literatura:</u> *"Claims run-off uncertainty: the full picture" - M. Merz, M.V. Wüthrich, 2015.*

Zadanie 8.

Rozważamy dwie linie biznesowe, w których wyznaczono jednoroczne oczekiwane zyski na poziomie 40 i 90 oraz jednoroczne wymogi kapitałowe na poziomie 120 i 250. Współczynnik korelacji Pearsona pomiędzy jednorocznymi stratami w liniach wynosi 0.25. Strata na poziome linii biznesowej jest równa ekspozycji przemnożonej przez czynnik ryzyka. Jako miarę ryzyka do wyznaczenia wymogu kapitałowego stosujemy trzykrotność odchylenia standardowego jednorocznej straty.

a) Wyznacz wymóg kapitałowy dla obu linii łącznie (zdywersyfikowany kapitał dla spółki) (1p).
b) Wyznacz alokacje Eulera zdywersyfikowanego kapitału dla spółki do linii biznesowych – wyprowadź wzór na alokację bezpośrednio z ogólnej definicji alokacji Eulera (2p).
c) Wyznacz miary RORAC dla linii biznesowych przy alokacji Eulera i wskaż, która linia osiąga wyższą stopę zwrotu na kapitale ryzyka. Co oznacza ten wynik z punktu widzenia zarządzania kapitałem i maksymalizacji miary RORAC dla spółki (2p).

Odpowiedzi:

a) Wyznaczamy zdywersyfikowany kapitał:

$$RC(L_1 + L_2) = \sqrt{(120)^2 + (250)^2 + 2 * 120 * 250 * 0.25} = 303.15.$$

b) Zgodnie z alokacją Eulera, alokacja zdywersyfikowanego kapitału wyznaczonego zgodnie z miarą RC dana jest wzorem:

$$EC(L_1|L) = \frac{d}{dh} RC(L_1 + L_2 + hL_1)|_{h=0}.$$

Rozważmy miarę ryzyka RC równą odchyleniu standardowemu. Wyznaczamy:

$$RC(L_1 + L_2 + hL_1) = \sqrt{(1+h)^2\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2(1+h)\sigma_1\sigma_2\rho},$$
$$EC(L_1|L) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_1\sigma_2\rho}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho}}.$$

Wyznaczamy alokacje kapitału do linii pierwszej i drugiej:

$$EC(L_1|L) = 3 * \frac{cov(L_1, L_1 + L_2)}{SD(L_1 + L_2)} = \frac{120^2 + 120 * 250 * 0.25}{\sqrt{120^2 + 250^2 + 2 * 120 * 250 * 0.25}} = 72.24,$$

$$EC(L_2|L) = 3 * \frac{cov(L_2, L_1 + L_2)}{SD(L_1 + L_2)} = \frac{250^2 + 120 * 250 * 0.25}{\sqrt{120^2 + 250^2 + 2 * 120 * 250 * 0.25}} = 230.91.$$

c) Wyznaczamy miary RORAC:

$$RORAC_{linia\ I} = \frac{40}{72.24} = 0.55,$$
$$RORAC_{linia\ II} = \frac{90}{230.91} = 0.39,$$
$$RORAC_{spółka} = \frac{130}{303.15} = 0.43.$$

d) Ponieważ $RORAC_{linia\ I} > RORAC_{spółka} > RORAC_{linia\ II}$, należy zwiększyć ekspozycję w linię pierwszą.

Przykładowa literatura: Rozdziały 8.4 i 8.5 *w "Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools", revised edition - A. McNeil, R. Frey, P. Embrechst, Princeton, 2015.*

Zadanie 9.

Rozważamy niezależne szkody z dwóch linii biznesowych $X_1 \sim Exp(a)$ i $X_2 \sim Exp(a)$ o rozkładach wykładniczych postaci:

$$F(x) = 1 - e^{-ax}, x > 0.$$

Niech $a = 1$. Analizujemy efekt dywersyfikacji porównując:

$$\rho\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right) \ vs\ \rho(X),$$

przy zadanej mierze ryzyka ρ.

a) Oceń czy szkody dywersyfikują się jeżeli efekt dywersyfikacji mierzymy stosując Formułę Standardową z reżimu Wypłacalność II i odchylenie standardowe jako miarę ryzyka (2p)
b) Oceń czy szkody dywersyfikują się jeżeli efekt dywersyfikacji mierzymy stosując Value-at-Risk na poziomie $p = 0.7$ jako miarę ryzyka (2p)
c) W oparciu o obliczenia z p. a) i b) i Twoją intuicję, wskaż wadę miary Value-at-Risk z punktu widzenia wyznaczania kapitału ekonomicznego w modelach wewnętrznych (1p).

Wskazówka: Znamy momenty zmiennej o rozkładzie wykładniczym: $E[X] = \frac{1}{a}$, $Var[X] = 1/a^2$, oraz rozkład zmiennej $X_1 + X_2$:

$$F_{X_1+X_2}(x) = 1 - e^{-a}\ (1 + ax), \quad x > 0.$$

W celu porównania miar Value-at-Risk na poziomie ufności *p* dla dwóch zmiennych $Y \sim F_Y$ i $Z \sim F_Z$ o rozkładach ciągłych, porównujemy:

$$F_Y^{-1}(p)\ vs\ F_Z^{-1}(p),$$

lub równoważnie:

$$p\ vs\ F_Y\left(F_Z^{-1}(p)\right).$$

Odpowiedzi:

a) Przy parametrze $a = 1$ szkody mają $Var[X] = 1$. Stosując Formułę Standardową opartą o odchylenie standardowe wyznaczamy:

$$\rho\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right) = \frac{\sqrt{1^2 + 1^2}}{2} = 0.7071\ vs\ \ \rho(X) = 1.$$

Efekt dywersyfikacji między niezależnymi szkodami znajduje odzwierciedlenie w mierze ryzyka odchylenie standardowe ponieważ:

$$\rho\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right) \ < \ \rho(X).$$

b) Wyznaczamy kwantyl rzędu p=0.7 dla zmiennej $X \sim Exp(1)$:

$$F_X^{-1}(p) = -\frac{1}{a}\ln(1-p) = 1.2039.$$

Wykorzystując wskazówkę nt. rozkładu $X_1 + X_2$, wyznaczamy:

$$F_{X_1+X_2}\left(2 * F_X^{-1}(p)\right) = 0.6933 < 0.7 = p.$$

W konsekwencji, dostajemy:

$$F_{X_1+X_2}^{-1}(p) > \ 2 * F_X^{-1}(p),$$

$$F_{\frac{X_1+X_2}{2}}^{-1}(p) > \ F_X^{-1}(p).$$

Efekt dywersyfikacji między niezależnymi szkodami nie znajduje odzwierciedlenia w mierze ryzyka Value-at-Risk na poziomie ufności 0.7 ponieważ:

$$\rho\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right) \ < \ \rho(X).$$

c) Miara VaR nie spełnia własności podaddytywności oraz nie spełnia własności porządku stochastycznego drugiego rzędu. W konsekwencji, miara VaR może dawać wyniki sprzeczne z intuicją ekonomiczną i finansową, np. może nie kwantyfikować efektu dywersyfikacji niezależnych ryzyk.

Przykładowa literatura: Rozdział 2.3 *w "Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools", revised edition - A. McNeil, R. Frey, P. Embrechst, Princeton, 2015.*

Zadanie 10.

Firma posiada następujący program reasekuracji nieproporcjonalnej:

- Reasekurację nadwyżki szkody 8MLN xs 2MLN, z zachowkiem 2 mln PLN i górnym limitem odpowiedzialności reasekuratora 8 mln PLN. Reasekuracja stosowana jest do nadwyżki szkody liczonej w stosunku do każdego zdarzenia. Program reasekuracji posiada nieskończenie wiele wznowień.

a) Pojawiły się dwie szkody: pierwsza w wysokości 4 mln i druga - 16 mln. Wyznacz szkody netto (2p),

b) Do wyceny programu reasekuracji nieproporcjonalnej stosujemy krzywą *exposure curve* postaci:

$$r(x) = \frac{1 - 0.5^x}{1 - 0.5}, \quad x \in [0,1].$$

Wyznacz wartość oczekiwaną szkody z kontraktu 8MLN xs 2MLN jeżeli szkoda maksymalna dla zdarzenia *probable maximum loss* wynosi 20MLN. Przyjmij jednostkową wartość oczekiwaną szkody brutto (3p).

Wskazówka:

Krzywa *exposure curve* jest zdefiniowana dla złożonej zmiennej $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$:

$$r(x) = \frac{E[\sum_{i=1}^{N} \min(X_i;\ x \cdot M)]}{E[\sum_{i=1}^{N} X_i]} = \frac{E[\min(X_i;\ x \cdot M)]}{E[X]},$$

gdzie M oznacza *probable maximum loss.*

Odpowiedzi:

a) Obliczamy:

Szkoda	Reasekuracja nadwyżki szkody	Szkoda netto
4 mln	2 mln	2 mln
16 mln	8 mln	8 mln

b) Wyceniamy pojedynczą szkodę reasekurowaną zgodnie z kontraktem L xs U:

$$E[\min(\max(X - U; 0); L)] = E[\min(X; U + L)] - E[\min(X; U)]$$
$$= E[X] * \left(r\left(\frac{U + L}{M}\right) - r\left(\frac{U}{M}\right)\right) = 1 * (0.5858 - 0.1339) = 0.4518.$$

Przykładowa literatura: Rozdział 7.4 w *“Reinsurance: Actuarial and Statistical Aspects” - H. Albrecher, J. Beirlant, J. Teugels, Wiley, 2017.*

Sesja egzaminacyjna w dniu 27 lutego 2024 r.

Zarządzanie ryzykiem zakładu ubezpieczeń

Arkusz ocen

Zadanie nr	Punktacja
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	