

Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXXIX Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 16 października 2023r.

Matematyka finansowa

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.

Przyjmijmy, że na rynku spełnione są założenia modelu Blacka-Scholesa oraz dostępna jest akcja \mathcal{A} nie płażąca dywidendy. Przez $\mathcal{O}_t^{\mathcal{A}}(S_t, K, T)$ oznaczmy opcję europejską na akcję \mathcal{A} o następujących charakterystykach: opcja jest wystawiana w chwili t , cena akcji \mathcal{A} w chwili t wynosi S_t , cena wykonania opcji wynosi K , a opcja wykonywana jest w momencie $T > t$.

Niech $C_N^{\mathcal{A}}(q)$ będzie ceną instrumentu finansowego wystawianego w chwili $t = 0$ przez firmę ABC o następującej charakterystyce:

- w każdej z chwil $t = 0, 1, \dots, N - 1$ następuje losowanie określające czy:
 - i) kupujący instrument otrzymuje od firmy ABC europejską opcję kupna $\mathcal{O}_t^{\mathcal{A}}(S_t, S_t, N)$, czy też
 - ii) kupujący instrument wystawia firmie ABC europejską opcję sprzedaży $\mathcal{O}_t^{\mathcal{A}}(S_t, S_t, N)$;
- prawdopodobieństwo wylosowania scenariusza i) wynosi q , a scenariusza ii) wynosi $1 - q$;
- losowania są niezależne zarówno od siebie jak i od procesu cen akcji.

Zakładając, iż $S_0 = 100$, roczna stopa wolna od ryzyka wynosi stale $r = 4\%$, a zmienność równa jest $\sigma = 0.25$, proszę wyznaczyć wartość $C_{10}^{\mathcal{A}}\left(\frac{1}{2}\right)$. Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 0
- (B) 32
- (C) 64
- (D) 96
- (E) 128

Zadanie 2.

Rozważmy rynek akcji, na którym spełnione są założenia modelu Black'a-Scholes'a. Do wyceny akcji \mathcal{A} inwestor stosuje model dwumianowy (t.j. zakłada, że jednym okresie cena akcji może urosnąć od wartości 1 do wartości $u > 1$ z prawdopodobieństwem p , bądź też spaść do wartości $d < 1$ z prawdopodobieństwem $1 - p$) z założeniem Jarrow'a-Rude'a ($p = \frac{1}{2}$).

Inwestor kalibruje swój model w taki sposób, aby średnia i wariancja ceny akcji \mathcal{A} po jednym okresie odpowiadała średniej i wariancji ceny akcji \mathcal{A} na rynku Blacka-Scholesa dla długości okresu $\Delta t = \frac{1}{12}$. Zakładając, że stopa wolna od ryzyka wynosi $r = 2.5\%$, akcja \mathcal{A} płaci dywidendę $q = 0.25\%$, natomiast współczynnik zmienności cen akcji równy jest $\sigma = 10\%$, proszę wyznaczyć wartość $u - 1$ (proszę podać najbliższą wartość).

- (A) 2.7%
- (B) 2.8%
- (C) 2.9%
- (D) 3.0%
- (E) 3.1%

Zadanie 3.

Rozważmy proces Browna W_t oraz proces Y , zdefiniowany jako $Y_t := t^2(W_t)^3$.

Proszę określić, które równanie opisuje dynamikę procesu Y_t .

(A) $dY_t = \left\{ \frac{2Y_t}{t} + 3(t^4 Y_t)^{\frac{1}{3}} \right\} dt + 3(tY_t)^{\frac{2}{3}} dW_t$

(B) $dY_t = \left\{ \frac{3Y_t}{t} + 2(t^3 Y_t)^{\frac{1}{3}} \right\} dt + 2(tY_t)^{\frac{2}{3}} dW_t$

(C) $dY_t = \left\{ \frac{3Y_t}{t} + 3(t^3 Y_t)^{\frac{2}{3}} \right\} dt + 3(tY_t)^{\frac{1}{3}} dW_t$

(D) $dY_t = \left\{ \frac{3Y_t}{t} + 2(t^4 Y_t)^{\frac{2}{3}} \right\} dt + 2(tY_t)^{\frac{1}{3}} dW_t$

(E) $dY_t = \left\{ \frac{3Y_t}{t} + 3(t^4 Y_t)^{\frac{1}{3}} \right\} dt + 2(tY_t)^{\frac{2}{3}} dW_t$

Zadanie 4.

Niech \mathcal{D}_k oznacza sumę wartości k rent malejących $(Da)_{\bar{n}}$, tzn. $\mathcal{D}_k = \sum_{n=1}^k (Da)_{\bar{n}}$, natomiast I_k oznacza sumę wartości k rent rosnących $(Ia)_{\bar{n}}$, tzn. $I_k = \sum_{n=1}^k (Ia)_{\bar{n}}$. Proszę wskazać który z poniższych wzorów wyraża różnicę $\mathcal{D}_{15} - I_{15}$ dla każdego $i \neq 0$?

$$i) \frac{105i - 30 + (2v + 1)\ddot{a}_{15} - 15v^{15}}{i^2}$$

$$ii) \frac{105i - 30 + (2i + 3)a_{15} - 15v^{15}}{i^2}$$

$$iii) \frac{105i - 15 + a_{15} + 2\ddot{a}_{15} - 30v^{15}}{i^2}$$

$$iv) \frac{105i - 28 + 3a_{15} - 17v^{15}}{i^2}.$$

- (A) Tylko ii)
- (B) Tylko ii) oraz iii)
- (C) Tylko iii)
- (D) Tylko ii) oraz iv)
- (E) Żadna z powyższych odpowiedzi (A) – (D) nie jest prawidłowa.

Zadanie 5.

Niech $T_0 = 0$. Rozważmy rynek Blacka-Scholesa, na którym nie ma możliwości arbitrażu i opcję wyboru (*chooser option*) na niepłacącą dywidendy akcje \mathcal{A} .

Nabywca tej opcji będzie miał prawo określenia w chwili $T_1 = 1$, czy kontrakt ten jest opcją kupna czy też opcją sprzedaży (z ceną wykonania $K = 120$ oraz datą wygaśnięcia $T_2 = 4$). Wiedząc, że $S_0 = 100$, $r = 4\%$, oraz współczynnik zmienności dla akcji \mathcal{A} wynosi $\sigma = 0.3$ proszę określić wartość najbliższą cenie opcji wyboru w chwili T_0 :

- (A) 28
- (B) 30
- (C) 32
- (D) 34
- (E) 36

Zadanie 6.

Polski inwestor planuje zakup 1 000 USD za 4 miesiące. Decyduje się na zakup 4-miesięcznej walutowej opcji kupna z ceną wykonania 4.5 PLN/USD. Wiemy, że stopa wolna od ryzyka w Polsce wynosi 8%, podczas gdy w Stanach Zjednoczonych równa jest 4%. Wiemy, że zmienność kursu wynosi 20%, a bieżący kurs to 4.2 PLN/USD. Proszę określić cenę opcji, która pozwoli zabezpieczyć płatność 1 000 USD za 4 miesiące. Proszę podać najbliższą wartość:

- (A) 93
- (B) 97
- (C) 100
- (D) 104
- (E) 107

Zadanie 7.

Rozważmy rynek, na którym jednoroczna stopa spot wynosi 9.7%, natomiast dwuletnia stopa spot wynosi 10.5%. Na rynku tym dwuletnia, stałokuponowa obligacja sprzedawana jest *at par*.

Firmy A oraz B zainteresowane są uzyskaniem z banku dwuletniego kredytu na kwotę K każda, przy czym firma A chciałaby uzyskać kredyt o zmiennym oprocentowaniu, a firma B – o oprocentowaniu stałym. Bank zaoferował pożyczki o następujących warunkach (stopy roczne):

	Firma A	Firma B
Stałe	11.5%	13.8%
Zmienne	LIBOR + 2.25%	LIBOR + 3.25%

Firmy stwierdziły, że najkorzystniejsze dla nich będzie, gdy:

- firma A weźmie kredyt o stałym oprocentowaniu,
- firma B weźmie kredyt o zmiennym oprocentowaniu,
- firmy A i B zawrą kontrakt *swap*, na mocy którego:
 - firma A płaci firmie B oprocentowanie zmienne LIBOR + c ,
 - firma B płaci firmie A oprocentowanie stałe 10.75%.

Ile wynosić powinna wartość c , aby żadna z firm nie straciła na kontrakcie, jeśli:

- alternatywnie dla kontraktu *swap* obie firmy mogą emitować i kupować obligacje – zarówno stałokuponowe jak i zmiennokuponowe (w oparciu o stopę LIBOR),
- na rynku brak kosztów transakcyjnych związanych z pożyczką, zawarciem transakcji *swap*, bądź emisją lub kupnem obligacji?

- (A) 0.19%
- (B) 0.24%
- (C) 0.29%
- (D) 0.34%
- (E) 0.39%

Zadanie 8.

Kredyt w wysokości 5000 PLN jest spłacany przez 10 lat za pomocą równych rat na koniec każdego roku przy oprocentowaniu wynoszącym 4% w skali roku. Pożyczkobiorca może przyspieszyć spłacanie zadłużenia, jednakże w takim wypadku płaci karę w wysokości 3% od wartości nadpłaconej ponad ratę kredytu. Jeżeli łączna płatność (zwiększona rata plus ewentualna kara) na koniec pierwszego roku wyniesie 800 PLN, na koniec drugiego roku wyniesie 750 PLN, a na koniec trzeciego roku wyniesie 700 PLN, to jakie jest niespłacone saldo kredytu przed zapłaceniem raty kredytu na koniec czwartego roku? Proszę podać najbliższą odpowiedź.

- (A) 3421
- (B) 3423
- (C) 3425
- (D) 3427
- (E) 3429

Zadanie 9.

Roczna stopa zwrotu w roku t , tj. $(1 + i_t)$ gdzie i_0 oznacza stopę procentową w okresie od $t = 0$ do $t = 1$, ma rozkład log-normalny z wartością oczekiwaną 108% oraz odchyleniem standardowym 20%. Stopy zwrotu w kolejnych latach są od siebie niezależne. Jaką kwotę trzeba zainwestować jednorazowo w $t = 0$, aby z prawdopodobieństwem 95% wartość inwestycji po 5 latach wynosiła co najmniej 500 PLN? Proszę podać najbliższą odpowiedź.

- (A) 707
- (B) 717
- (C) 727
- (D) 737
- (E) 747

Zadanie 10.

Niech natężenie oprocentowania (*force of interest*) w chwili t wynosi:

$$\delta_t = \begin{cases} 0,05 & \text{dla } 0 < t \leq 4 \\ a(t^2 - t) & \text{dla } t > 4 \end{cases}$$

Ile wynosi wartość parametru a jeżeli wartość bieżąca w $t = 0$ jednorazowej płatności w wysokości 750 PLN dokonanej w $t = 8$ wynosi 50 PLN? Proszę podać najbliższą odpowiedź.

- (A) 0.005
- (B) 0.010
- (C) 0.015
- (D) 0.020
- (E) 0.025

Dystrybuanta rozkładu normalnego $N(0,1)$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 16 października 2023r.

Matematyka finansowa

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko :

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	D	
2	E	
3	A	
4	D	
5	E	
6	C	
7	C	
8	B	
9	C	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.