Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXXVIII Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 13 czerwca 2023 r.

Zarządzanie ryzykiem zakładu ubezpieczeń

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: ....

Czas trwania egzaminu: 120 minut

Uwagi

Wartości dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego N(0,1):

x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)
0,01	0,503989	0,41	0,659097	0,81	0,79103	1,21	0,886861	1,61	0,946301	2,01	0,977784	2,41	0,992024
0,02	0,507978	0,42	0,662757	0,82	0,793892	1,22	0,888768	1,62	0,947384	2,02	0,978308	2,42	0,99224
0,03	0,511966	0,43	0,666402	0,83	0,796731	1,23	0,890651	1,63	0,948449	2,03	0,978822	2,43	0,992451
0,04	0,515953	0,44	0,670031	0,84	0,799546	1,24	0,892512	1,64	0,949497	2,04	0,979325	2,44	0,992656
0,05	0,519939	0,45	0,673645	0,85	0,802337	1,25	0,89435	1,65	0,950529	2,05	0,979818	2,45	0,992857
0,06	0,523922	0,46	0,677242	0,86	0,805105	1,26	0,896165	1,66	0,951543	2,06	0,980301	2,46	0,993053
0,07	0,527903	0,47	0,680822	0,87	0,80785	1,27	0,897958	1,67	0,95254	2,07	0,980774	2,47	0,993244
0,08	0,531881	0,48	0,684386	0,88	0,81057	1,28	0,899727	1,68	0,953521	2,08	0,981237	2,48	0,993431
0,09	0,535856	0,49	0,687933	0,89	0,813267	1,29	0,901475	1,69	0,954486	2,09	0,981691	2,49	0,993613
0,1	0,539828	0,5	0,691462	0,9	0,81594	1,3	0,9032	1,7	0,955435	2,1	0,982136	2,5	0,99379
0,11	0,543795	0,51	0,694974	0,91	0,818589	1,31	0,904902	1,71	0,956367	2,11	0,982571	2,51	0,993963
0,12	0,547758	0,52	0,698468	0,92	0,821214	1,32	0,906582	1,72	0,957284	2,12	0,982997	2,52	0,994132
0,13	0,551717	0,53	0,701944	0,93	0,823814	1,33	0,908241	1,73	0,958185	2,13	0,983414	2,53	0,994297
0,14	0,55567	0,54	0,705401	0,94	0,826391	1,34	0,909877	1,74	0,95907	2,14	0,983823	2,54	0,994457
0,15	0,559618	0,55	0,70884	0,95	0,828944	1,35	0,911492	1,75	0,959941	2,15	0,984222	2,55	0,994614
0,16	0,563559	0,56	0,71226	0,96	0,831472	1,36	0,913085	1,76	0,960796	2,16	0,984614	2,56	0,994766
0,17	0,567495	0,57	0,715661	0,97	0,833977	1,37	0,914657	1,77	0,961636	2,17	0,984997	2,57	0,994915
0,18	0,571424	0,58	0,719043	0,98	0,836457	1,38	0,916207	1,78	0,962462	2,18	0,985371	2,58	0,99506
0,19	0,575345	0,59	0,722405	0,99	0,838913	1,39	0,917736	1,79	0,963273	2,19	0,985738	2,59	0,995201
0,2	0,57926	0,6	0,725747	1	0,841345	1,4	0,919243	1,8	0,96407	2,2	0,986097	2,6	0,995339
0,21	0,583166	0,61	0,729069	1,01	0,843752	1,41	0,92073	1,81	0,964852	2,21	0,986447	2,61	0,995473
0,22	0,587064	0,62	0,732371	1,02	0,846136	1,42	0,922196	1,82	0,96562	2,22	0,986791	2,62	0,995604
0,23	0,590954	0,63	0,735653	1,03	0,848495	1,43	0,923641	1,83	0,966375	2,23	0,987126	2,63	0,995731
0,24	0,594835	0,64	0,738914	1,04	0,85083	1,44	0,925066	1,84	0,967116	2,24	0,987455	2,64	0,995855
0,25	0,598706	0,65	0,742154	1,05	0,853141	1,45	0,926471	1,85	0,967843	2,25	0,987776	2,65	0,995975
0,26	0,602568	0,66	0,745373	1,06	0,855428	1,46	0,927855	1,86	0,968557	2,26	0,988089	2,66	0,996093
0,27	0,60642	0,67	0,748571	1,07	0,85769	1,47	0,929219	1,87	0,969258	2,27	0,988396	2,67	0,996207
0,28	0,610261	0,68	0,751748	1,08	0,859929	1,48	0,930563	1,88	0,969946	2,28	0,988696	2,68	0,996319
0,29	0,614092	0,69	0,754903	1,09	0,862143	1,49	0,931888	1,89	0,970621	2,29	0,988989	2,69	0,996427
0,3	0,617911	0,7	0,758036	1,1	0,864334	1,5	0,933193	1,9	0,971283	2,3	0,989276	2,7	0,996533
0,31	0,62172	0,71	0,761148	1,11	0,8665	1,51	0,934478	1,91	0,971933	2,31	0,989556	2,71	0,996636
0,32	0,625516	0,72	0,764238	1,12	0,868643	1,52	0,935745	1,92	0,972571	2,32	0,98983	2,72	0,996736
0,33	0,6293	0,73	0,767305	1,13	0,870762	1,53	0,936992	1,93	0,973197	2,33	0,990097	2,73	0,996833
0,34	0,633072	0,74	0,77035	1,14	0,872857	1,54	0,93822	1,94	0,97381	2,34	0,990358	2,74	0,996928
0,35	0,636831	0,75	0,773373	1,15	0,874928	1,55	0,939429	1,95	0,974412	2,35	0,990613	2,75	0,99702
0,36	0,640576	0,76	0,776373	1,16	0,876976	1,56	0,94062	1,96	0,975002	2,36	0,990863	2,76	0,99711
0,37	0,644309	0,77	0,77935	1,17	0,879	1,57	0,941792	1,97	0,975581	2,37	0,991106	2,77	0,997197
0,38	0,648027	0,78	0,782305	1,18	0,881	1,58	0,942947	1,98	0,976148	2,38	0,991344	2,78	0,997282
0,39	0,651732	0,79	0,785236	1,19	0,882977	1,59	0,944083	1,99	0,976705	2,39	0,991576	2,79	0,997365
0,4	0,655422	0,8	0,788145	1,2	0,88493	1,6	0,945201	2	0,97725	2,4	0,991802	2,8	0,997445

Zadanie 1.

a) Rozważmy ciąg niezależnych szkód $X_i,\ i = 1, \ldots, n$, o takim samym rozkładzie, o skończonych dwóch pierwszych momentach. Policz wariancję średniej szkody i uzasadnij, że ryzyko wynikające ze szkód jest dywersyfikowalne (1p).

b) Rozważmy duży portfel ubezpieczeniowy, składający się z niezależnych jednorocznych polis o identycznych charakterystykach rozkładów szkód. Średnia szkoda z polis w poprzednim roku szkodowym wyniosła 1,200 PLN. Aktuariusz przeprowadził wycenę ubezpieczenia i zaproponował składkę czystą (aktuarialną) na najbliższy rok szkodowy na poziomie 1,500 PLN. Charakterystyki rozkładów szkód nie zmieniły się. Odwołując się do zasady dywersyfikacji, oceń tę propozycję (1p).

c) Rozważmy ciąg niezależnych zmiennych losowych $Y_i,\ i = 1, \ldots, n$, o takim samym rozkładzie oraz niezależną zmienną losową Z. Wszystkie zmienne posiadają skończone dwa pierwsze momenty. Szkody modelujemy zgodnie z modelem czynnikowym:

$$X_i = Z + Y_i,\ \ i = 1, \ldots, n.$$

Policz wariancję średniej szkody i uzasadnij, że ryzyko wynikające ze szkód nie jest dywersyfikowalne (1p).

d) Ubezpieczyciel sprzedaje polisy ubezpieczeń zdrowotnych pokrywające koszty hospitalizacji. Wskaż przykłady ryzyka dywersyfikowalnego i niedywersyfikowalnego w tym ubezpieczeniu (2p).

Odpowiedzi:

a) Wyznaczamy:

$$Var\left(\frac{X_1 + \cdots X_n}{n}\right) = \frac{Var(X)}{n} \to 0, \quad n \to \infty,$$

co oznacza, że ryzyko średniej szkody, mierzone wariancją, zanika w dużym portfelu (przy powyższych założeniach).

b) Zgodnie z Mocnym Prawem Wielkich Liczb oraz własnością z p. a), zachodzi:

$$\frac{X_1 + \cdots X_n}{n} \to E[X], \quad n \to \infty,$$

co oznacza, że składka czysta (aktuarialna) powinna pokrywać się ze średnią zaobserwowaną szkodą w dużym portfelu niezależnych ryzyk o takich samych rozkładach szkód. W konsekwencji, składka w wysokości 1,500 PLN jest zbyt wysoka w stosunku do oczekiwanych szkód.

c) Wyznaczamy:

$$Var\left(\frac{X_1 + \cdots X_n}{n}\right) = \frac{Var(Y)}{n} + Var(Z) \to Var(Z), \quad n \to \infty,$$

co oznacza, że ryzyko średniej szkody, mierzone wariancją, nie zanika w dużym portfelu (przy powyższych założeniach) i pozostaje niedywersyfikowalny komponent Z.

d) Ryzyko dywersyfikowalne: ryzyko wynikające z losowych niezależnych zachorowań ubezpieczonych (punkt a). Ryzyko niedywersyfikowalne: ryzyko wynikające ze wspólnych zachorowań ubezpieczonych w wyniku pandemii (punkt c).

Przykładowa literatura: Rozdział 1.4 w *"Actuarial Finance – Derivatives, Quantitative Models and Risk Management" - M. Boudreault, J.F. Renaud, Wiley, 2019.*

Zadanie 2.

Rozważamy jednoroczne ubezpieczenie z funduszem kapitałowym ze składką jednorazową i gwarancją minimalnego świadczenia związanego z dożyciem końca trwania umowy. Zakładamy, że ubezpieczony dożywa końca trwania umowy i pomijamy ryzyko śmiertelności w tym przykładzie. W momencie t=0 ubezpieczony wpłaca składkę w wysokości 100 PLN. Następnie, w momencie t=0 ubezpieczyciel pobiera opłatę w wysokości x=5% wpłaconej składki, w celu zabezpieczenia gwarancji minimalnego świadczenia. Składka w wysokości 100*(1-x)=95 PLN jest lokowana w fundusz inwestycyjny i wartość inwestycji tworzy wartość rachunku ubezpieczonego. Ubezpieczyciel pobraną opłatę w wysokości 100*x=5 PLN lokuje na rachunku bankowym, na którym zarabia 3% w okresie rocznym. W momencie końca trwania, w chwili t=1, umowy ubezpieczyciel wypłaca ubezpieczonemu większą z wartości: wartość rachunku lub 100% składki wpłaconej na fundusz (składki po potrąceniu wstępnej opłaty). Kapitałowy wymóg wypłacalności na moment t=0 dla tego produktu wynosi 50 PLN. Udziałowcy oczekują stopy zwrotu 6% na zaangażowanych środkach równych wartości wymogu kapitałowego. Pomijamy podatki i pozostałe koszty działalności ubezpieczeniowej.

Aktuariusz postanowił wycenić produkt stosując symulacje stochastyczne. Stopy zwrotu z funduszu modeluje rozkładem lognormalnym, gdzie zakładamy, że logarytm stopy zwrotu ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej 0.1 i odchyleniu standardowym 0.2.

a) Uzupełnij przepływy poniżej, wyznacz wynik techniczny i miarę *Economic Value Added* w scenariuszu, w którym stopa zwrotu z funduszu realizuje się na poziomie kwantyla 15% odpowiedniego rozkładu (2p).

Czas	Rachunek ubezpieczonego t	Rachunek ubezpieczonego t+1	Rachunek ubezpieczyciela t	Rachunek ubezpieczyciela t+1
t=0	95		5	
Czas	Wartość gwarancji t+1	Wartość świadczenia t+1	Wynik techniczny t+1	EVA t+1
t=0				

b) Aktuariusz zaproponował uproszczone podejście do wyceny, w którym stopa zwrotu z funduszu jest prognozowana deterministycznie zgodnie z wartością oczekiwaną w rozkładzie lognormalnym. Oceń tę propozycję z punktu widzenia oceny zyskowności produktu i wartości gwarancji (1p).

c) Ubezpieczyciel stosuje pasywną strategię zabezpieczania ryzykiem finansowym. Wyznacz opłatę x, którą powinien pobrać w chwili t=0 tak, aby zabezpieczyć gwarancję z prawdopodobieństwem 75%. Wystarczy zapisać równanie, z którego można wyliczyć zmienną x (2p).

Odpowiedzi:

a) Kwantyl rzędu 15% dla stopy zwrotu z rozkładu lognormalnego wynosi $e^{0.1+0.2*(-1.036)} = 0.89$. Przepływy:

Czas	Rachunek ubezpieczonego t	Rachunek ubezpieczonego t+1	Rachunek ubezpieczyciela t	Rachunek ubezpieczyciela t+1
t=0	95	95*0.89 = 85.34	5	5*(1+3%) = 5.15
Czas	Wartość gwarancji t+1	Wartość świadczenia t+1	Wynik techniczny t+1	EVA t+1
t=0	Max(95-85.34;0) =9.66	95	5.15-9.66= -4.51	-4.51-6%*50 = -7.51

b) Gwarancja minimalnego świadczenia (wypłata z opcji put) jest nieliniową funkcją wartości funduszu. W konsekwencji, wyznaczenie wartości gwarancji przyjmując scenariusz wartości oczekiwanej dla funduszu nie będzie odzwierciedlało prawdziwego oczekiwanego profilu wypłaty z gwarancji. Pominięcie symulacji stochastycznych nie pozwoli również na ocenę ryzyka wystawionej gwarancji (odchyleń od oczekiwanej wypłaty), która nie jest zabezpieczona portfelem replikującym w tym przykładzie i przy założeniu scenariusza oczekiwanej stopy zwrotu z funduszu będzie zawsze *out-of-the-money*.

c) Niech r oznacza stopę procentową na rachunku bankowym, S stopę zwrotu z rozkładu lognormalnego z parametrami (μ, σ^2), a – prawdopodobieństwo pokrycia gwarancji, P – wpłaconą składkę. Opłata $x \in (0,1)$ powinna spełniać równanie:

$$\Pr(P * x * (1+r) > \max(P * (1-x) - P * (1-x) * S; 0)) = a.$$

Czyli:

$$a = \Pr(P * x * (1+r) > \max(P * (1-x) - P * (1-x)S; 0)) =$$
$$\Pr\left(\frac{x * (1+r)}{1-x} > \max(1-S; 0)\right)$$
$$= \Pr\left(\frac{x * (1+r)}{1-x} > \max(1-S; 0) \,|S > 1\right) * \Pr(S > 1)$$
$$+\Pr\left(\frac{x * (1+r)}{1-x} > \max(1-S; 0) \,|S \leq 1\right) * \Pr(S \leq 1)$$
$$= \Pr\left(\frac{x * (1+r)}{1-x} > 0|S > 1\right) * \Pr(S > 1)$$
$$+\Pr\left(\frac{x * (1+r)}{1-x} > 1 - S|S \leq 1\right) * \Pr(S \leq 1)$$

$$= \Pr(S > 1) + \Pr\left(S > 1 - \tfrac{x*(1+r)}{1-x} | S \leq 1\right) * \Pr\,(S \leq 1)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\log\left(1 - \frac{x * (1+r)}{1-x}\right) - \mu}{\sigma}\right).$$

Rozwiązując powyższe równanie, sostajemy x=0.0323.

<u>Przykładowa literatura:</u> Rozdział 15 w*"Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks", 3rd edition - D. Dickson, M. Hardy, H. Waters, Cambridge, 2020;* oraz *"EVA/RAROC vs. MCEV Earnings: A Unification Approach", C. Kraus, The Geneva Papers on Risk and Insurance - Issues and Practice 38.*

Zadanie 3.

Rozważamy jednoroczne ubezpieczenie z funduszem kapitałowym ze składką jednorazową i świadczeniami związanymi ze śmiercią i dożyciem końca trwania umowy. W momencie t=0 ubezpieczony wpłaca składkę w wysokość 100 PLN i ubezpieczyciel pobiera opłatę w wysokości 100*x% PLN w celu zabezpieczenia zobowiązania. Następnie, składka w wysokości 100*(1-x%) PLN wpłacana jest na fundusz, którego dynamika opisana jest geometrycznym ruchem Browna zgodnie ze wzorem:

$$dS(t) = aS(t)dt + bS(t)dW(t),$$

gdzie $a = 10\%$, $b = 15\%$. Zwroty z funduszu determinują wartość rachunku w ubezpieczeniu. Jeżeli ubezpieczony przeżyje, ubezpieczyciel wypłaca w momencie t=1, ubezpieczonemu większą z wartości: wartość rachunku lub 102% składki wpłaconej na fundusz (składki po potrąceniu wstępnej opłaty). Jeżeli ubezpieczony umrze, świadczenie w wyniku śmierci płatne w momencie t=1 wyniesie 110% wartości rachunku. Prawdopodobieństwo zgonu wynosi 5% rocznie zgodnie z najlepszym oszacowaniem aktuariusza. Na rynku finansowym obserwujemy płaską strukturę terminową i stopa wolna od ryzyka wynosi 3% w okresie rocznym. Ryzyko śmiertelności jest niezależne od ryzyka finansowego i jest w pełni dywersyfikowalne w portfelu. Opcje kwotowane na rynku finansowym wyceniane są zgodnie z modelem Blacka-Scholesa. Na rynku finansowym dostępne są rachunek bankowy wolny od ryzyka, obligacje wolne od ryzyka o dowolnym terminie wykupu oraz fundusz. Nie ma ograniczeń w handlu na rynku finansowym.

a) Opisz metodę wyceny zobowiązań obowiązującą w reżimie Wypłacalność II. Omów komponent najlepszego oszacowania i marginesu ryzyka (2p).
b) Ubezpieczyciel zabezpiecza swoje zobowiązanie poprzez replikację. Wyznacz wartość x, przy której pobrana opłata pozwoli na replikację zobowiązania – gwarancji w wyniku dożycia i sumy na ryzyku w momencie śmierci (2p).
c) Zaproponuj podejście do wyznaczenia marginesu ryzyka na potrzeby wyceny powyższego zobowiązania w reżimie Wypłacalność II, jeżeli ryzyko śmiertelności nie byłoby dywersyfikowalne i ubezpieczyciel narażony byłby na niedywersyfikowalne ryzyko wzrostu współczynnika śmiertelności w ciągu najbliższego roku (1p).

<u>Wskazówka</u>: Wzór Blacka Scholesa dla opcji put:

$$Cena\ opcji\ put = -N(-d_1)S(0) + N(-d_2)Ke^{-rT},$$
$$Delta\ opcji\ put = -N(-d_1),$$
$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\log\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right), \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Odpowiedzi:

a) Zgodnie z art. 75-79 w *DYREKTYWA PARLAMENTU EUROPEJSKIEGO I RADY 2009/138/WE z dnia 25 listopada 2009 r. w sprawie podejmowania i prowadzenia działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej* (Wypłacalność II) oraz art.37 w *DYREKTYWA PARLAMENTU EUROPEJSKIEGO I RADY 2009/138/WE z dnia 25 listopada 2009 r. w sprawie podejmowania i prowadzenia działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej* (Wypłacalność II).

b) Załóżmy, że *S(0)=1*. Wtedy *S(T)* opisuje stopę zwrotu z funduszu w całym okresie trwania umowy. Niech *P* oznacza wpłaconą składkę. Wartość rachunku *F* w momencie *T=1* dana jest wzorem:

$$F(T) = F(0) * S(T), \quad F(0) = P * (1 - x).$$

Zobowiązanie (wypłata z gwarancji w wyniku dożycia i suma na ryzyku w momencie śmierci) ma postać:

$$\begin{gathered} H = p * \max(F(0) * (1 + g) - F(T); 0) + q * u * F(T) \\ = p * \max(F(0) * (1 + g) - F(0) * S(T); 0) + q * u * F(0) * S(T) \\ (1 - x) * P * \{p * \max(1 + g - S(T), 0) + q * u * S(T)\}, \end{gathered}$$

gdzie *g* oznacza gwarantowaną stopę zwrotu w całym okresie ubezpieczenia, *u* – sumę na ryzyku wyrażona jako procent wartości rachunku, *p* i *q* – prawdopodobieństwa przeżycia i zgonu ubezpieczonego. Zakładamy, że ryzyko śmiertelności jest w pełni dywersyfikowalne i niezależne od ryzyka finansowego - losowe zdarzenia związane z dożyciem i śmiercią możemy więc zastąpić oczekiwanymi zdarzeniami (liczba przeżyć i zgonów).

Zobowiązanie *H* można interpretować jako wypłatę z dwóch instrumentów finansowych - opcji put na *S* i kontaktu forward na *S*. Wykorzystując wzór Blacka-Scholesa, wartość 1 jednostki opcji put przy parametrach:

$$r = \log(1 + 0.03), \ \sigma = 0.15, \qquad T = 1, \qquad K = 1 + 2\%, \qquad S(0) = 1,$$

jest równa 0.0547. Wartość 1 jednostki kontraktu forward jest równa cenie bieżącej *S(0)=1*. Dostajemy równanie:

$$(1 - x)\{95\% * 0.0547 + 5\% * 10\%\} = x.$$

Równanie spełnia wartość $x = 0.0539$.

c) Wyznaczamy zmianę wartości zobowiązania związaną ze wzrostem współczynnika śmiertelności. Wyznaczony wymóg kapitałowy dla ryzyka śmiertelności przemnażamy przez koszt kapitału.

<u>Przykładowa literatura:</u> *DYREKTYWA PARLAMENTU EUROPEJSKIEGO I RADY 2009/138/WE z dnia 25 listopada 2009 r. w sprawie podejmowania i prowadzenia działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej* (Wypłacalność II); *DYREKTYWA PARLAMENTU EUROPEJSKIEGO I RADY 2009/138/WE z dnia 25 listopada 2009 r. w sprawie podejmowania i prowadzenia działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej* (Wypłacalność II); oraz Rozdział 18.2 w *"Actuarial Finance – Derivatives, Quantitative Models and Risk Management" - M. Boudreault, J.F. Renaud, Wiley, 2019.*

Zadanie 4.

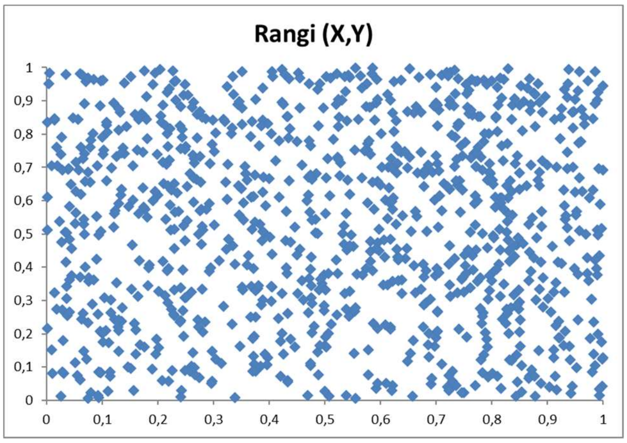
Rozważamy wyznaczenie kapitału ekonomicznego przy pomocy miary Value-at-Risk i Conditional Tail Expectation w modelu wewnętrznym firmy ubezpieczeniowej. Rozważmy dwa czynniki $Y \sim N(0.1, 0.05^2)$, $Z \sim N(0.075, 0.03^2)$ oraz stratę X generowaną przez te dwa czynniki:

$$(X|Y > 0, Z > 0) = 0,$$
$$(X|Y \leq 0, Z > 0) = 10$$
$$(X|Y > 0, Z \leq 0) = 50$$
$$(X|Y \leq 0, Z \leq 0) = 150$$

a) Wyznacz miarę VaR na poziomie 95% przy założeniu, że zmienne (Y, Z) są niezależne i uzasadnij, czy zastosowałbyś miarę VaR do wyznaczenia kapitału ekonomicznego w tym przypadku (1p).
b) Wyznacz miarę CTE na poziomie 95% przy założeniu, że zmienne (Y, Z) są niezależne (1p).
c) Wyznacz miarę ryzyka CTE przy założeniu, że zależność pomiędzy czynnikami (Y, Z) opisana jest kopułą Gumbella:

$$C(u, v) = \exp\{-((-\ln(u))^a + (-\ln(v))^a)^{1/a}\},$$

z parametrem $a = 2$, co odpowiada wsp. Kendalla na poziomie 50% (2p).
d) Oceń, które z powyższych założeń dotyczących zależności czynników jest bardziej adekwatne, jeżeli dysponujemy następującym wykresem rang obserwacji dla czynników (X, Y):



Odpowiedź uzasadnij (1p).

<u>Wskazówka:</u> Miara CTE dana jest wzorem $CTE_p(L) = E[L|L \geq VaR_p(L)]$.

Odpowiedzi:

a) Wyznaczamy rozkład zmiennej *X:*

$$X = \begin{cases} 0 \quad z\,pr.\, 97.72\% * 99.38\% = 97.12\%, \\ 10 \quad z\,pr.\, 2.28\% * 99.38\% = 2.26\%, \\ 50 \quad z\,pr.\, 0.62\% * 97.72\% = 0.61\%, \\ 150 \quad z\,pr.\, 2.28\% * 0.62\% = 0.01\%, \end{cases}$$

gdzie prawdopodobieństwa dla zmiennej *X* zostały wyznaczone zgodnie z rozkładami normalnymi dla niezależnych zmiennych *(Y,Z)*. Obliczamy kwantyl:

$$VaR_{0.95}(X) = F_X^{-1}(0.95) = 0.$$

Zastosowanie miary VaR nie ma sensu z ekonomicznego punktu widzenia w tym przykładzie, ponieważ wynik zero oznacza brak kapitału.

b) $CTE_{0.95}(X) = E[X] = 0.5507.$

c) Wyznaczamy prawdopodobieństwa dla zależnych zmiennych *(Y,Z)*:

$$\Pr(Y \leq 0\,, Z \leq 0) = C(2.28\%, 0.62\%) = 0.18\%,$$
$$\Pr(Y \leq 0) = 2.28\%, \quad \Pr(Z \leq 0) = 0.62\%,$$

oraz rozkład zmiennej *X*:

$$X = \begin{cases} 0 \quad z\,pr.\; 1 - 0.18\% - 0.44\% - 2.10\% = 97.28\%, \\ 10 \quad z\,pr.\; 2.28\% - 0.18\% = 2.10\%, \\ 50 \quad z\,pr.\, 0.62\% - 0.18\% = 0.44\%, \\ 150 \quad z\,pr.\; 0.18\%. \end{cases}$$

$VaR_{0.95(X)} = 0,\; CTE_{0.95}(X) = E[X] = 0.6975.$

d) Wykres wskazuje na brak zależności pomiędzy czynnikami ryzyka.

<u>Przykładowa literatura:</u> Rozdziały 2.3, 7.2 i 7.4 *w "Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools", revised edition - A. McNeil, R. Frey, P. Embrechst, Princeton, 2015.*

Zadanie 5.

Inwestor dysponuje kapitałem w wysokości 1000 PLN. Rozważmy dwa ryzykowne aktywa i jeden instrument wolny od ryzyka dostępne na rynku finansowym. Ryzykowne aktywa mają oczekiwane stopy zwrotu odpowiednio 5% i 7%, odchylenia standardowe stóp zwrotu: 9% i 12% i współczynnik korelacji Pearsona pomiędzy stopami zwrotu równy 50%. Stopa wolna od ryzyka wynosi 3%. Rozważamy problem Markowitza optymalnego wyboru portfela inwestycyjnego.

a) Wyprowadź i wyznacz alokację środków (w wartościach nominalnych) pomiędzy aktywa ryzykowne i wolne od ryzyka, przy której otrzymamy najmniejsze ryzyko inwestycyjne mierzone odchyleniem standardowym straty z inwestycji (strata z inwestycji mierzona jest stopą zwrotu z inwestycji) przy zadanej wartości oczekiwanej stopy zwrotu z inwestycji równej 6% (3p).
b) Scharakteryzuj postać linii portfeli efektywnych (*efficient portfolio frontier*) w problemie Markowitza, gdzie dopuszczamy wybór aktywów wolnych od ryzyka i ryzykownych (1p).
c) Wyjaśnij, jak zmieni się linia portfeli efektywnych (*efficient portfolio frontier*), jeżeli wykluczymy aktywa wolne od ryzyka. Z punktu widzenia ryzyka mierzonego odchyleniem standardowym i zysku mierzonego wartością oczekiwaną inwestycji, wyjaśnij co zyskujemy wybierając aktywa wolne od ryzyka do naszego portfela inwestycyjnego (1p).

Odpowiedzi:

a) Niech a oznacza procentowy udział środków zainwestowanych w pierwszy ryzykowny instrument, b – procentowy udział środków zainwestowanych w drugi ryzykowny instrument. Reszta środków inwestowana jest w instrument wolny od ryzyka. Rozwiązujemy problem optymalizacyjny:

$$a^2 * 0.09^2 + b^2 * 0.12^2 + 2 * a * 0.09 * b * 0.12 * 0.5 \to min$$

p.w.

$$a * 0.05 + b * 0.07 + (1 - a - b) * 0.03 = 0.06.$$

Stosując metodę mnożników Lagrange'a, dostajemy

$$a = 64.29\%, b = 21.43\%,$$

Wartości nominalne zainwestowanych środków wynoszą: 642.90 PLN, 214.30 PLN i 142.80 PLN.

b) Na płaszczyźnie (μ, σ), linia portfeli efektywnych ma kształt półprostej. Na linii portfeli efektywnych leżą optymalne portfele zgodnie z kryterium Markowitza, takie, że nie istnieje portfel o niższej wariancji stopy zwrotu przy ustalonej wartości oczekiwanej stopy zwrotu i nie istnieje portfel o wyższej wartości oczekiwanej stopy zwrotu przy ustalonej wariancji stopy zwrotu.

c) Na płaszczyźnie (μ, σ), linia (granica) portfeli efektywnych ma kształt gałęzi hiperboli powyżej wierzchołka. W klasycznym przypadku, półprosta z p. b) jest styczna do hiperboli (można pominąć pozostałe przypadki). Oznacza to, że dołączenie instrumentu wolnego od ryzyka do portfela inwestycyjnego pozwala uzyskać niższą wariancję stopy zwrotu przy zadanej oczekiwanej stopie zwrotu.

<u>Przykładowa literatura:</u> Rozdział 3.2 w *"Financial Markets Theory: Equilibrium, Efficiency and Information", 2nd edition - E. Barucci, C. Fontana, Springer, 2017.*

Zadanie 6.

Rozważamy dwie linie biznesowe, w których wyznaczono jednoroczne oczekiwane zyski per ekspozycja na poziomie 30 i 50 oraz jednoroczne wymogi kapitałowe per ekspozycja na poziomie 100 i 175. Wymogi kapitałowe oraz oczekiwane zyski zależą liniowo od ekspozycji. Współczynnik korelacji Pearsona pomiędzy jednorocznymi stratami w liniach wynosi 0.25. Wymogi kapitałowe dla linii i spółki wyznaczamy zgodnie z metodą czynnikową, w której wymóg kapitałowy jest równy trzykrotności odchylenia standardowego jednorocznej straty. Ekspozycje w obu liniach wynoszą po 1 jednostce.

a) Wyznacz wymóg kapitałowy dla obu linii łącznie (zdywersyfikowany kapitał dla spółki) (1p).
b) Wyznacz alokacje Eulera zdywersyfikowanego kapitału dla spółki do linii biznesowych – wyprowadź wzór na alokację bezpośrednio z ogólnej definicji alokacji Eulera (2p).
c) Wyznacz miary RORAC dla spółki i linii biznesowych przy alokacji Eulera (1p),
d) Uzasadnij, w której linii należy zwiększyć ekspozycję, aby zmaksymalizować RORAC dla spółki (1p).

Odpowiedzi:

a) Wyznaczamy zdywersyfikowany kapitał:

$$RC(L_1 + L_2) = 3 * \sqrt{\left(\frac{100}{3}\right)^2 + \left(\frac{175}{3}\right)^2 + 2 * \frac{100}{3} * \frac{175}{3} * 0.25} = 222.21.$$

b) Zgodnie z alokacją Eulera, alokacja zdywersyfikowanego kapitału wyznaczonego zgodnie z miarą *RC* dana jest wzorem:

$$EC(L_1|L) = \frac{d}{dh} RC(L_1 + L_2 + hL_1)|_{h=0}.$$

Rozważmy miarę ryzyka *RC* równą odchyleniu standardowemu. Wyznaczamy:

$$RC(L_1 + L_2 + hL_1) = \sqrt{(1+h)^2\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2(1+h)\sigma_1\sigma_2\rho},$$
$$EC(L_1|L) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_1\sigma_2\rho}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho}}.$$

Wyznaczamy alokacje kapitału do linii pierwszej i drugiej:

$$EC(L_1|L) = 3 * \frac{cov(L_1, L_1 + L_2)}{SD(L_1 + L_2)} = \frac{1}{3} * \frac{100^2 + 100 * 175 * 0.25}{\sqrt{100^2 + 175^2 + 2 * 100 * 175 * 0.25}} = 64.69,$$
$$EC(L_2|L) = 3 * \frac{cov(L_2, L_1 + L_2)}{SD(L_1 + L_2)} = \frac{1}{3} * \frac{175^2 + 100 * 175 * 0.25}{\sqrt{100^2 + 175^2 + 2 * 100 * 175 * 0.25}} = 157.51.$$

c) Wyznaczamy miary RORAC:

$$RORAC_{linia\ I} = \frac{30}{64.69} = 0.46,$$
$$RORAC_{linia\ II} = \frac{50}{157.52} = 0.32,$$
$$RORAC_{spółka} = \frac{80}{222.21} = 0.36.$$

d) Ponieważ $RORAC_{linia\ I} > RORAC_{spółka} > RORAC_{linia\ II}$, należy zwiększyć ekspozycję w linię pierwszą.

Przykładowa literatura: Rozdziały 8.4 i 8.5 *w "Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools", revised edition - A. McNeil, R. Frey, P. Embrechst, Princeton, 2015.*

Zadanie 7.

Inwestor posiada środki w wysokości 20 PLN. Zamierza zbudować portfel inwestycyjny kupując:

- x jednostek akcji A,
- y jednostek opcji put na akcję A z ceną wykonania 0.8 i terminem zapadalności 2 lata.

Cena bieżąca akcji A wynosi 1, jej zmienność w okresie rocznym 20%, stopa wolna od ryzyka w okresie rocznym 5%.

a) Wyznacz x i y, aby portfel był delta neutralny (2p).
b) Wyznacz gamma portfela (1p).
c) Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że wartość portfela inwestycyjnego delta neutralnego zwiększy się o 1% w ciągu 5 dni stosując aproksymację delta-gamma (rozwinięcie Taylora drugiego rzędu wartości portfela) i przyjmując założenie, że $S(h) - S(0) \approx S(0) * Z,\ Z \sim N(0, \sigma^2 h)$. Zakładamy, że rok składa się z 250 dni. W rozwinięciu Taylora pomijamy skrócenie terminu wykupu dla opcji (2p).

Wskazówki: Wzór Blacka Scholesa dla opcji put, współczynniki delta i gamma:

$$Cena\ opcji\ put = -N(-d_1)S(0) + N(-d_2)Ke^{-rT},$$
$$Delta\ opcji\ put = -N(-d_1),$$
$$Gamma\ opcji\ put = \frac{f(d_1)}{S(0)\sigma\sqrt{T}.}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}.} e^{-x^2/2}$$
$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\log\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right), \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Odpowiedzi:

a) Rozwiązujemy równanie:

$$x + y * 0.0154 = 20,$$
$$x + y * (-0.1011) = 0,$$

gdzie pierwsze równanie opisuje wartości inwestycji, drugie równanie – parametry delta inwestycji. Dostajemy x=-151.75 i y=171.75.

b) Gamma portfela, równa gammie pozycji w opcję put, wynosi 171.75*0.6254=107.42.

c) Stosując aproksymację Taylora drugiego rzędu dostajemy:

$$V(S(h)) - V(S(0)) = V_s(S(0))S(0)Z + \frac{1}{2}V_{ss}(S(0))S^2(0)Z^2 = 53.71 * Z^2.$$

Wyznaczamy prawdopodobieństwo:

$$\Pr\Big(V\big(S(h)\big) - V\big(S(0)\big) > 1\% * V\big(S(0)\big)\Big) = \Pr(53.71 * Z^2 > 0.2)$$
$$= \Pr(|Z| > 0.061) = 2 * \Phi\left(\frac{-0.061}{0.2\sqrt{\frac{5}{250}}}\right) = 0.0309.$$

Przykładowa literatura: Rozdziały 20.5 w *"Actuarial Finance – Derivatives, Quantitative Models and Risk Management" - M. Boudreault, J.F. Renaud, Wiley, 2019*; oraz Rozdział 2.2 w *"Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools", revised edition - A. McNeil, R. Frey, P. Embrechst, Princeton, 2015.*

Zadanie 8.

Rozważamy uproszczony model wewnętrzny w reżimie Wypłacalność II, w którym rozważamy wyłącznie ryzyko rezerw pochodzące z jednego roku szkodowego. Stosujemy model klasyfikacji krzyżowej *Over-Dispersed Poisson*, w którym skumulowane wypłaty $(C_i, i = 0, \dots, n)$, w przyszłych latach kalendarzowych *i,* opisane są wzorem: $C_0 = 1000$, $C_i = C_{i-1} + X_i$, gdzie $X_i \sim ODP(\mu_i, \phi_i)$ są niezależne oraz

Rok kalendarzowy i	μ_i	ϕ_i
1	500	2.5
2	300	1.5
3	100	1.1

Podane oszacowania (μ_i, ϕ_i) są oszacowaniami *best estimate* dla rozkładów szkód i nie zmieniają się w kolejnych latach kalendarzowych niezależnie od realizacji wypłat. Na rynku finansowym obserwujemy płaską strukturę terminową i roczna stopa wolna od ryzyka wynosi 0%. W celu wyznaczenia miar ryzyka, stosujemy aproksymację rozkładów szkód rozkładem normalnym.

a) Wyznacz wymóg kapitałowy dla ryzyka rezerw w modelu wewnętrznym w horyzoncie jednorocznym w reżimie Wypłacalność II, zapisz i uzasadnij stratę, której ryzyko oceniasz, oraz miarę ryzyka, którą zastosujesz (2p).
b) Wyznacz wymóg kapitałowy dla ryzyka rezerw w modelu wewnętrznym w horyzoncie ostatecznym stosując miarę Value-at-Risk na poziomie istotności 75%, zapisz i uzasadnij stratę, której ryzyko oceniasz (2p).
c) Wyznacz *reverse stress test* dla szkód wypłaconych w najbliższym roku kalendarzowym (kwantyl w rozkładzie prawdopodobieństwa), który doprowadzi do zwiększenia aktualnego oszacowania szkody ostatecznej o 5% (porównujemy najlepsze oszacowania całkowitych wypłat z analizowanego roku szkodowego na początku i na końcu pierwszego roku kalendarzowego) (1p).

Wskazówka: Jeżeli $X_i \sim ODP(\mu_i, \phi_i)$, to $E(X_i) = \mu_i, Var(X_i) = \phi_i E(X_i)$.

Odpowiedzi:

a) Stratę w horyzoncie jednorocznym definiujemy jako:

$$L_{1YR} = E[C_n|C_1, C_0] - E[C_n|C_0] = X_1 - E[X_1] \sim N(0{,}2.5 * 500).$$

Miara $VaR_{0.995}(L_{1YR}) = 2.57 * \sqrt{1250} = 91.06.$

b) Stratę w horyzoncie ostatecznym definiujemy jako:

$$\begin{aligned} L_{ULT} &= E[C_n|C_n, C_{n-1}, \dots, C_1, C_0] - E[C_n|C_0] \\ &= C_n - E[C_n|C_0] \\ &= X_1 + X_2 + X_3 - E[X_1 + X_2 + X_3] \sim N(0{,}2.5 * 500 + 1.5 * 300 + 1.1 * 100). \end{aligned}$$

Miara $VaR_{0.75}(L_{ULT}) = 0.67 * \sqrt{1810} = 28.69.$

Powyższe wartości oczekiwane opisują najlepsze oszacowania szkody ostatecznej z zadanego roku szkodowego pod warunkiem informacji w danym momencie czasu rozwoju szkody.

c) Oszacowanie szkody ostatecznej na moment t=0 wynosi:

$$E[C_n|C_0] = 1000 + 500 + 300 + 100 = 1900$$

Oszacowanie szkody ostatecznej na moment t=1 wynosi:

$$E[C_n|C_1, C_0] = 1000 + X_1 + 300 + 100 = X_1 + 1400$$

Szukamy scenariusza, w którym zachodzi:

$$X_1 + 1400 > 1900 * (1 + 5\%)$$
$$X_1 > 595$$

Wyznaczamy prawdopodobieństwo scenariusza:

$$\Pr(X_1 > 595) = 1 - \Phi\left(\frac{595 - 500}{\sqrt{2.5 * 500}}\right) = 0.0036.$$

<u>Przykładowa literatura:</u> *“Claims run-off uncertainty: the full picture” - M. Merz, M.V. Wüthrich, 2015;* oraz Rozdział 3.5.6 w *“Actuarial Aspects of ERM for Insurance Companies”, 2016.*

Zadanie 9.

Firma ubezpieczeniowa przygotowała bilans w reżimie Wypłacalność II na koniec 2022r. Wyznaczyła wartość najlepszego oszacowania zobowiązań (*best estimate*) równą 500, margines ryzyka (*risk margin*), przy koszcie kapitału 6%, równy 75, kapitałowy wymóg wypłacalności równy 250 oraz wielkość środków własnych (nadwyżka aktywów nad wartość zobowiązań) równą 800. Firma wykorzystuje Formułę Standardową. Na rynku finansowym obserwujemy poniższą strukturę terminową i stopa wolna od ryzyka wynosi:

Okres zapadalności	1 rok	2 lata	3 lata	4 lata
Stopa wolna od ryzyka	3%	3.5%	4%	4%

Wartość najlepszego oszacowania przepływu pieniężnego w roku 2023, które jest uwzględnione w najlepszym oszacowaniu zobowiązania na koniec 2022, wynosi 200 (zakładamy, że przepływ następuje na końcu roku, przed wyceną zobowiązania na koniec 2023). Na koniec roku 2023 okazało się, że przepływ pieniężny w roku 2023 wyniósł 300, zamiast oczekiwanych 200, i aktuariusz postanowił zmienić założenia wyceny, co skutkowało zwiększeniem najlepszego oszacowania zobowiązań i marginesu ryzyka na koniec 2023 o 30% w porównaniu z oszacowaniami, które zostałyby policzone na koniec 2023 przy parametrach ustalonych na koniec 2022. Struktura terminowa stóp procentowanych nie zmieniła się.

a) Wyznacz wartość najlepszego oszacowania zobowiązań na koniec 2023 (1p).
b) Wyznacz margines ryzyka na koniec 2023 (1p).
c) Wyznacz wielkość środków własnych na koniec 2023, przyjmując założenie, że aktywa lokowane są w instrumenty wolne od ryzyka (2p).
d) Jak zmieni się wynik z punktu c), jeżeli przyjmiemy założenie, że w roku 2022 ubezpieczyciel osiągnął stopę zwrotu w wysokości 5% ze swoich aktywów – wykonaj ponowne obliczenia (1p).

Odpowiedzi:

a) Wartość najlepszego oszacowania wyznaczamy zgodnie ze wzorem:

$$V_0 = \frac{E(C_1) + V_1}{1 + r_f}.$$

Wartość najlepszego oszacowania na koniec 2023 przed zmianą założeń wyceny wynosi V_1 =500*(1+3%)-200=315. Po zmianie założeń wyceny, wynosi 315*1.3=409,50.

b) Wartość marginesu ryzyka wyznaczamy zgodnie ze wzorem:

$$RM_0 = \frac{CoC * SCR(1) + RM_1}{1 + r_f}.$$

Wartość marginesu ryzyka na koniec 2023 przed zmianą założeń wyceny wynosi RM_1 =75*(1+3%)-6%*250=62.25. Po zmianie założeń wyceny, wynosi 62.25*1.3=80.92.

c) Wartość środków własnych na koniec 2022 wynosi 800. Środki własne rosną zgodnie ze stopa zwrotu o wartość 3%*800=24. Środki własne są również powiększane o wartość środków uwalnianą z marginesu ryzyka, czyli 6%*250=15. Jednocześnie, środki własne są pomniejszane o zmianę wartości zobowiązań związaną ze zmianą założeń wyceny, czyli są pomniejszane o 315*30%+62.25*30%=113.17, jak również o różnicę pomiędzy realizacją przepływu a jego oczekiwaną wartością, czyli są pomniejszane o 300-200=100. Wartość środków własnych na koniec 2023 wynosi 800+24+15-113.17-100=625.82.

d) Wartość aktywów na moment t=0 wynosi 800+500+75=1375. Dodatkowy zysk ponad stopę wolną od ryzyka wynosi 1375*2%=27.5, który powiększa środki własne.

<u>Przykładowa literatura:</u> Art. 75-79 i 88 w *DYREKTYWA PARLAMENTU EUROPEJSKIEGO I RADY 2009/138/WE z dnia 25 listopada 2009 r. w sprawie podejmowania i prowadzenia działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej* (Wypłacalność II); oraz art.37 w *DYREKTYWA PARLAMENTU EUROPEJSKIEGO I RADY 2009/138/WE z dnia 25 listopada 2009 r. w sprawie podejmowania i prowadzenia działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej* (Wypłacalność II).

Zadanie 10.

Wymień i krótko opisz wymogi jakie powinien spełnić model wewnętrzny w świetle Dyrektywy Wypłacalność II, aby został zaakceptowany przez organ nadzoru. Należy opisać pięć standardów (5p).

Odpowiedzi: Zgodnie z art. 222-247 w *ROZPORZĄDZENIE DELEGOWANE KOMISJI (UE) 2015/35 z dnia 10 października 2014 r. uzupełniające dyrektywę Parlamentu Europejskiego i Rady 2009/138/WE w sprawie podejmowania i prowadzenia działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej (Wypłacalność II).*

Sesja egzaminacyjna w dniu 13 czerwca 2023 r.

Zarządzanie ryzykiem zakładu ubezpieczeń

Arkusz ocen

Zadanie nr	Punktacja
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	