Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXXVIII Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 12 czerwca 2023r.

Matematyka pozostałych ubezpieczeń osobowych i majątkowych

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: ....

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.
Ryzyka X_1 i X_2 są niezależne i mają rozkłady o dystrybuantach odpowiednio $F_1(x)$ oraz $F_2(x)$ o przebiegu podanym w tabeli

	$x < 0$	$x \in [0,1)$	$x \geq 1$
$F_1(x)$	0	x	1
$F_2(x)$	0	$\frac{8}{10} + \frac{1}{10}x$	1

$\Pr\left(X_1 + X_2 \leq \frac{3}{2}\right)$ wynosi:

(A) $\frac{72}{80}$

(B) $\frac{73}{80}$

(C) $\frac{74}{80}$

(D) $\frac{75}{80}$ TAK

(E) $\frac{76}{80}$

Zadanie 2.
Zmienna losowa X jest sumą trzech niezależnych zmiennych losowych o rozkładach złożonych Poisson z parametrami odpowiednio (λ_1, F_1), (λ_2, F_2), oraz (λ_3, F_3). Wartości parametrów częstotliwości λ_1, λ_2, λ_3, oraz dystrybuanty F_1, F_2, F_3, dane są wzorami:

i	λ_i	$F_i(x)$ dla $x < 1$	$F_i(x)$ dla $x \in [1, 3)$	$F_i(x)$ dla $x \geq 3$
1	1/2	0	5/10	1
2	1	0	6/10	1
3	1/2	0	3/10	1

Wobec tego $\Pr(X = 4)$ wynosi:

(A) $\frac{13}{24}e^{-2}$

(B) $\frac{15}{24}e^{-2}$

(C) $\frac{22}{24}e^{-2}$

(D) $\frac{25}{24}e^{-2}$ TAK

(E) $\frac{26}{24}e^{-2}$

Zadanie 3.
Szkody pojawiają się zgodnie z procesem Poissona o intensywności λ. Proces zastartował w momencie czasu $t = 0$. Niech T_n oznacza moment zajścia *n*-tej z kolei szkody, zaś $N(t)$ liczbę szkód, do których doszło do momentu *t*. Wobec tego warunkowa wartość oczekiwana:

$$\mathrm{E}(T_2 - T_1 | N(1) = 2)$$

Wynosi:

(A) 1/4

(B) 1/3 TAK

(C) 1/2

(D) 2/3

(E) bez informacji o wartości parametru λ nie można udzielić odpowiedzi liczbowej

Zadanie 4.
Niech:
- N oznacza liczbę roszczeń z jednego wypadku ubezpieczeniowego, zaś:
- $T_1, T_2, ..., T_N$ oznacza czas, jaki upływa od momentu zajścia wypadku do zgłoszenia roszczenia odpowiednio 1-go, 2-go,…, N-tego, przy czym numeracja roszczeń od 1-go do N-tego jest całkowicie przypadkowa (porządek liczb $T_1, T_2, ..., T_N$ jest losowy)

Załóżmy, że:
- zmienne losowe $N, T_1, T_2, T_3, ...$ są niezależne,
- zmienne losowe $T_1, T_2, T_3, ...$ mają identyczny rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej 1 (jednostką pomiaru czasu jest miesiąc)
- zmienna losowa N ma rozkład geometryczny o funkcji prawdopodobieństwa:

$$\Pr(N = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad k = 1,2,3, ...$$

Niech A oznacza zdarzenie, iż w ciągu pierwszego miesiąca od zajścia wypadku zgłoszono dokładnie jedno roszczenie, a więc iż dokładnie jedna liczba ze zbioru liczb $\{T_1, T_2, ..., T_N\}$, jest mniejsza lub równa 1.

Prawdopodobieństwo, że z tego wypadku pojawią się jeszcze następne roszczenia:

$$\Pr(N > 1 | A)$$

Z dobrym przybliżeniem wynosi:

(A) 0.427

(B) 0.380

(C) 0.334 TAK

(D) 0.291

(E) 0.250

Zadanie 5.

Rozważamy klasyczny proces nadwyżki z zerową nadwyżką początkową:

$U(t) = ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$, gdzie:

- *ct* jest sumą składek zgromadzonych do momentu *t*,
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
- wartości szkód Y_1, Y_2, Y_3 są i.i.d, niezależne od procesu $N(t)$.

O rozkładzie wartości pojedynczej szkody wiemy tylko tyle, że:

- $\Pr(Y_1 \in [0, 10]) = 1$
- $\mathrm{E}(Y_1) = 2$

Wiemy też, że $c > 2\lambda$.

Interesuje nas warunkowa wartość oczekiwana deficytu w momencie ruiny, pod warunkiem że do ruiny dojdzie. Informacje są nazbyt skąpe, aby ją wyznaczyć, można jednak określić przedział, który zawiera wszystkie jej możliwe wartości, i równocześnie nie zawiera nic ponadto. Ten przedział to:

(A) $[0, 5]$

(B) $[1, 5]$ TAK

(C) $[1, 10]$

(D) $[2, 5]$

(E) $[2, 10]$

Zadanie 6.
Łączna wartość szkód:
- $X = Y_1 + Y_2 + ... + Y_N$, ($X = 0$ gdy $N = 0$)

ma przy danej wartości λ parametru ryzyka Λ warunkowy rozkład złożony Poissona z parametrami:
- oczekiwaną liczbą szkód równą λ,
- rozkładem wartości pojedynczej szkody danym dla $x \geq 0$ dystrybuantą: $F_{Y|\Lambda=\lambda}(x) = 1 - \exp\left(-a \cdot \exp(\lambda) \cdot x\right)$

Parametr ryzyka Λ ma w populacji ubezpieczonych rozkład Gamma(α, β), o gęstości:
- $f_\Lambda(x) = \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x)$.

Przyjmijmy wartości parametrów zadania równe:
- $a = \dfrac{1}{11}$,
- $\alpha = 4$, $\beta = 10$

Wobec tego iloraz:
- $\dfrac{\mathrm{E}(X)}{\mathrm{E}(N) \cdot \mathrm{E}(Y)}$

wynosi:

(A) 1

(B) $\dfrac{11}{12}$

(C) $\dfrac{10}{11}$ TAK

(D) $\dfrac{10}{12}$

(E) $\dfrac{9}{11}$

Zadanie 7.
Rozważamy model nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym:
$U_n = u + X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, gdzie:

- u to nadwyżka początkowa (nieujemna);
- $X_1, X_2, X_3, \ldots$ są i.i.d, i reprezentują różnice pomiędzy wpływami ze składki a wydatkami na odszkodowania w kolejnych latach;
- rozkład zmiennej X_1 jest czteropunktowy:
  $\Pr(X_1 = 2) = p_2$,
  $\Pr(X_1 = 1) = p_1$,
  $\Pr(X_1 = 0) = p_0$,
  $\Pr(X_1 = -1) = 1 - p_0 - p_1 - p_2$.

Niech $N = \min\{n\colon\ U_n < 0\}$ oznacza czas ruiny.
Przyjmijmy, że parametry procesu wynoszą: $p_0 = 2/10$, $p_1 = 2/10$, $p_2 = 1/10$, oraz $u = 3$. W tych warunkach ruina jest pewna, a więc $\Pr(N < \infty) = 1$. Wobec tego oczekiwany czas do ruiny $\mathrm{E}(N)$ jest wielkością dobrze określoną, i wynosi:

(A) 24

(B) 28

(C) 32

(D) 36

(E) 40 TAK

Zadanie 8.
Każdy kierowca z pewnej populacji zgłasza szkody zgodnie z procesem Poissona, przy czym intensywność λ (roczna) charakteryzująca pojedynczego kierowcę jest w przekroju tej populacji zróżnicowana. Populacja jest zamknięta, a kierowcy migrują pomiędzy trzema klasami bardzo prostego systemu bonus-malus. W systemie tym każdy kierowca, który w danym roku zgłosił jedną lub więcej szkód, ląduje w roku następnym w klasie pierwszej (z najwyższą składką). Jeśli jednak nie zgłosił żadnej szkody, wtedy:

- Ląduje w klasie 2, o ile w danym roku był w klasie 1;
- Ląduje w klasie 3, o ile w danym roku był w klasie 2.

Rozkład wartości parametru λ w przekroju populacji jest rozkładem wykładniczym o gęstości danej na półosi dodatniej wzorem:

- $f(x) = \beta \exp(-\beta x)$, z parametrem równymi $\beta = 9$.

W celu skalkulowania składki adekwatnej dla osób przebywających w klasie drugiej liczymy warunkową wartość oczekiwaną:

- $\mathrm{E}(N_3 | N_1 > 0, N_2 = 0)$,

gdzie N_3 to liczba szkód które zostaną zgłoszone w roku nadchodzącym, zaś N_2 oraz N_1 to odpowiednio liczba szkód w roku upływającym oraz rok wcześniej, a wszystkie trzy liczby dotyczą losowo dobranego kierowcy z tej populacji.
Owa warunkowa wartość oczekiwana wynosi:

(A) 21/110 TAK

(B) 1/11

(C) 7/33

(D) 19/90

(E) 20/99

Zadanie 9.

Niech $X_{t,j}$ oznacza wartość szkód zaszłych w roku *t* i zlikwidowanych w roku $(t+j)$, zaś $CX_{t,j} = \sum_{i=0}^{j} X_{t,i}$ odpowiednie wartości skumulowane. Zakładamy, iż likwidacja szkód zamyka się w okresie J lat, a więc iż dla $j > J$ wszystkie $X_{t,j}$ równają się zeru. Założenia o momentach pierwszych dwóch rzędów są następujące:

- $E\left(X_{t,j} \middle| \mu_t\right) = r_j\,\mu_t,$
  - gdzie współczynniki rozkładu opóźnienia r_j są nieujemne i $\sum_{j=0}^{J} r_j = 1$
- $cov\left(X_{t,j}, X_{s,i} \middle| \mu_t, \mu_s\right) = \begin{cases} r_j\,\sigma_t^2 & jeśli\ t = s\ \ oraz\ \ i = j \\ 0 & w\,p.p. \end{cases}$
- $E(\mu_t) = \mu$
- $E(\sigma_t^2) = \sigma^2$
- $cov(\mu_t, \mu_s) = \begin{cases} a & jeśli\ t = s \\ 0 & w\,p.p. \end{cases}$

Znamy wartości parametrów:

- $(r_0, r_1, r_2) = \left(\frac{3}{10}, \frac{2}{10}, \frac{1}{10}\right),$
- $\mu = 1000,$
- $\sigma^2 = 10000,$
- $a = 10000.$

Kalkulację rezerwy na koniec 2002 roku na szkody zaistniałe w 2000 roku i do tej pory niezlikwidowane przeprowadzamy w oparciu o predyktor liniowy postaci:

$$Pred\left(CX_{2000,J} - CX_{2000,2} \middle| CX_{2000,2}\right) = b_0 + b_1 CX_{2000,2}$$

Minimalizując błąd średniokwadratowy predyktora otrzymujemy wartości parametrów (b_0, b_1) równe:

(A) $(b_0, b_1) = (250, 0.25)$ TAK

(B) $(b_0, b_1) = (250, 0.15)$

(C) $(b_0, b_1) = (625, 0.25)$

(D) $(b_0, b_1) = (150, 0.15)$

(E) $(b_0, b_1) = (625, 0.625)$

Zadanie 10.

Obserwujemy realizacje łącznej wartości szkód $X_{i,t}$ i-tego ubezpieczonego w t-tym roku dla $i = 1,2,\ldots,N, t = 1,2,\ldots,T; N > 2, T > 2$.

Nie znamy wartości następujących parametrów:

$$\mu(\Theta_i) = E\left(X_{i,t}\middle|\Theta_i\right),$$
$$\sigma^2(\Theta_i) = var\left(X_{i,t}\middle|\Theta_i\right),$$
$$\mu = E[\mu(\Theta_i)],$$
$$s^2 = E[\sigma^2(\Theta_i)],$$
$$a = var[\mu(\Theta_i)],$$

wiemy jednak, że jeśli $i \neq j$ lub $t \neq s$ to $cov\left(X_{i,t}, X_{j,s}\middle|\Theta_i, \Theta_j\right) = 0$.

Niech $\overline{X}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_{i,t}$, $\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \overline{X}_i$.

Mamy dwa estymatory parametru a:

$$\hat{a}_1 = \frac{1}{NT-1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left(X_{i,t} - \overline{X}\right)^2 - \frac{1}{N(T-1)}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left(X_{i,t} - \overline{X}_i\right)^2,$$

oraz:

$$\hat{a}_2 = \max\{\hat{a}_1, 0\}.$$

Niech $MSE(\hat{a}_i) = E\left[(\hat{a}_i - a)^2\right]$.

Wybierz zdanie prawdziwe:

(A) oba estymatory są nieobciążone, $VAR(\hat{a}_1) < VAR(\hat{a}_2)$

(B) oba estymatory są nieobciążone, $VAR(\hat{a}_1) > VAR(\hat{a}_2)$

(C) $E(\hat{a}_1) < E(\hat{a}_2)$, $VAR(\hat{a}_1) < VAR(\hat{a}_2)$

(D) $VAR(\hat{a}_2) < VAR(\hat{a}_1) < MSE(\hat{a}_2)$

(E) $VAR(\hat{a}_2) < MSE(\hat{a}_2) < VAR(\hat{a}_1)$ TAK

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 12 czerwca 2023r.

Matematyka pozostałych ubezpieczeń osobowych i majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : ....K L U C Z O D P O W I E D Z I.......................

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	D	
2	D	
3	B	
4	C	
5	B	
6	C	
7	E	
8	A	
9	A	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna

.