Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXXVI Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 19 września 2022r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej ....

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.

O niezależnych zmiennych losowych X i Y wiadomo, że

$$\mathrm{Var} X = 1,\ \mathbb{E} X = 1,\ \mathrm{Var} Y = 2,\ \mathbb{E} Y = 2.$$

Ile wynosi $\mathrm{Var}(XY)$?

(A) 4

(B) 6

(C) 8

(D) 10

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 2.

Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny $\mathcal{U}(0, 1000)$. Definiujemy $Y = \min(X, 800)$. Ile wynosi $\mathbb{E}Y$?

(A) 380

(B) 400

(C) 440

(D) 480

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 3.
Załóżmy, że niezależne obserwacje $X_1,\ldots,X_{16}$ pochodzą z rozkładu $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. Definiujemy statystyki

$$\bar{X} = \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16} X_i, \qquad S^2 = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{16}(X_i-\bar{X})^2.$$

Ile wynosi $\mathbb{P}(\bar{X} > \mu | S^2 > \sigma^2)$?

Oznaczenia:

- $F_{\chi^2_d}(x)$ to dystrybuanta rozkładu χ^2 z d stopniami swodoby w punkcie x
- $F_{t,d}(x)$ to dystrybuanta rozkładu t-Studenta z d stopniami swodoby w punkcie x
- $\Phi(x)$ to dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego w punkcie x

(A) $1 - F_{\chi^2_{15}}(15)$

(B) $1 - \Phi(4)$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $1 - F_{t,15}(15)$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 4.

Jednorodny (w czasie) łańcuch Markowa $(X_1, X_0, \ldots)$ na przestrzeni stanów $\mathcal{S} = \{1, 2\}$ ma macierz przejścia

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ile wynosi $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\frac{X_n}{X_{n+1}}\right)$?

(A) $\frac{6}{5}$

(B) $\frac{5}{4}$

(C) $\frac{2}{3}$

(D) Granica nie istnieje

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 5.

X_1, X_2, X_3 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach wykładniczych z wartościami oczekiwanymi $\mathbb{E}X_i = \frac{1}{i}, i = 1, 2, 3$.

Ile wynosi $\mathbb{P}\left(X_1 = \min(X_1, X_2, X_3)\right)$?

(A) $\frac{5}{6}$

(B) $\frac{1}{6}$

(C) $\frac{1}{5}$

(D) $\frac{1}{3}$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 6.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, n \geq 3$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\mathcal{U}(a,b)$, tj. o rozkładzie jednostajnym na odcinku (a,b), gdzie $a < b$. Dla jakiego α estymator

$$\hat{\theta} = \alpha\left[\max(X_1, \ldots, X_n) - \min(X_1, \ldots, X_n)\right]$$

jest nieobciążonym estymatorem parametru $\theta = b - a$?

(A) $\frac{n+1}{n-2}$

(B) $\frac{n}{n+2}$

(C) $\frac{n}{n-1}$

(D) $\frac{n+1}{n-1}$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 7.

Ustalmy $n \geq 4$. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\mathcal{N}(\mu, \sigma_1^2)$, a $Y_1, \ldots, Y_n$ niech będą niezależnymi (od siebie i od ciągu $X_1, \ldots, X_n$) zmiennymi losowymi o rozkładzie $\mathcal{N}(\mu, \sigma_2^2)$. Wówczas dla dowolnego $\alpha \in (0,1)$ estymator

$$\hat{\mu} = \alpha \bar{X} + (1-\alpha)\bar{Y},$$

gdzie

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i,$$

jest nieobciążonym estymatorem parametru μ. Dla jakiego α średniokwadratowy błąd estymatora, tj. $\mathbb{E}(\hat{\mu} - \mu)^2$, jest najmniejszy?

(A) $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$

(B) $\dfrac{n-1}{n+1} \cdot \dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$

(C) $\dfrac{n+1}{n-1} \cdot \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$

(D) $\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$

(E) $\dfrac{1}{2}$

Zadanie 8.

Zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$ przy danej wartości parametru $\Theta = \theta \in (0,1)$ są warunkowo niezależne i mają rozkład

$$\begin{aligned} P(X_i = 1 | \Theta = \theta) &= \theta, \\ P(X_i = 0 | \Theta = \theta) &= 1 - \theta. \end{aligned}$$

Z kolei zmienna losowa Θ ma rozkład o gestości

$$f_\Theta(\theta) = 3(1-\theta)^2, \quad \theta \in (0,1).$$

Oznaczmy $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Ile wynosi $\mathbb{P}(S_4 > 0 | S_2 = 0)$?

(A) $\frac{2}{7}$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{5}{7}$

(D) $\frac{2}{3}$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 9.
Zaobserwowano $x_1, x_2, \ldots, x_n$, niezależną próbkę z rozkładu Poissona z nieznaną średnią $\lambda > 0$. Oznaczmy $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Niech $z_{1-\alpha/2}$ oznacza kwantyl rzędu $1-\alpha/2$ standardowego rozkładu normalnego, tj.

$$z_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right),$$

gdzie $\Phi(\cdot)$ to dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego $\mathcal{N}(0,1)$.

Asymptotyczny przedział ufności dla estymatora λ wyznaczonego metodą największej wiarogodności z wykorzystaniem informacji Fishera jest postaci:

(A) $\left(\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i},\ \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i}\right)$

(B) $\left(\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{n-1}{n-2}\sum_{i=1}^{n} x_i},\ \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{n-1}{n-2}\sum_{i=1}^{n} x_i}\right)$

(C) $\left(\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\bar{x}},\ \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\bar{x}}\right)$

(D) $\left(\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{n}{n-1}\sum_{i=1}^{n} x_i},\ \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{n}{n-1}\sum_{i=1}^{n} x_i}\right)$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 10.

Rzucamy niezależnie 2 razy symetryczną n-ścienną kostką do gry, $n \geq 6$ (kostki przyjmują z jednakowym prawdopodobieństwem wartości ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$). Oznaczmy wyniki przez X_1, X_2 oraz zdefiniujmy $Y = \max(X_1, X_2)$.
Ile wynosi $\mathbb{E}Y$?

(A) $\dfrac{2(n+1)}{3}$

(B) $\dfrac{(n+1)(4n-1)}{6n}$

(C) $\dfrac{4n-1}{6}$

(D) $\dfrac{(n+1)(3n-1)}{6n}$

(E) Żadne z powyższych

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 19 września 2022r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	C	
2	D	
3	C	
4	A	
5	B	
6	D	
7	D	
8	A	
9	C	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.