Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXXIV Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 12 kwietnia 2022 r.

Zarządzanie ryzykiem zakładu ubezpieczeń

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: ....

Czas trwania egzaminu: 120 minut

Uwagi

Wartości dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego N(0,1):

x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)
0,1	0,540	0,4	0,655	0,7	0,758	1,6	0,945	2,5	0,994
0,11	0,544	0,41	0,659	0,71	0,761	1,61	0,946	2,51	0,994
0,12	0,548	0,42	0,663	0,72	0,764	1,62	0,947	2,52	0,994
0,13	0,552	0,43	0,666	0,73	0,767	1,63	0,948	2,53	0,994
0,14	0,556	0,44	0,670	0,74	0,770	1,64	0,949	2,54	0,994
0,15	0,560	0,45	0,674	0,75	0,773	1,65	0,951	2,55	0,995
0,16	0,564	0,46	0,677	0,76	0,776	1,66	0,952	2,56	0,995
0,17	0,567	0,47	0,681	0,77	0,779	1,67	0,953	2,57	0,995
0,18	0,571	0,48	0,684	0,78	0,782	1,68	0,954	2,58	0,995
0,19	0,575	0,49	0,688	0,79	0,785	1,69	0,954	2,59	0,995
0,2	0,579	0,5	0,691	0,8	0,788	1,7	0,955	2,6	0,995

Zadanie 1.

Dysponujesz następującymi danymi dla spółki (w ujęciu rocznym):

Współczynnik beta dla akcji spółki	1.4
Stopa zwrotu z portfela rynkowego na rynku, na którym handlowane są akcje spółki	6%
Stopa wolna od ryzyka dla obligacji rządowych	3%

Stosunek kapitału pozyskanego w drodze emisji akcji i obligacji wynosi 1:2 (zgodnie z wartościami rynkowymi). Spółka wyceniana jest jako firma wolna od ryzyka kredytowego, co znajduje odzwierciedlenie w koszcie spłaty zobowiązań z wyemitowanych obligacji.

a) Wyznacz koszt kapitału (WACC) dla spółki jako ważony koszt emisji akcji i obligacji. Do wyznaczenia kosztu akcji zastosuj model CAPM (2p),
b) Przy zadanej strukturze finansowania, oblicz czy spółka powinna realizować nowy projekt inwestycyjny, wiedząc, że spodziewane wpływy są równe 100, 200, 300 w kolejnych trzech latach (przychody na koniec roku) w zamian za zainwestowanie 500 (jednorazowy koszt na początku pierwszego roku). Zakładamy, że przepływy pieniężne z inwestycji są wolne od ryzyka i stopa dyskontowa nie zawiera premii za ryzyko (1p),
c) Podaj, który z elementów we wzorze na współczynnik beta w modelu CAPM wskazuje, że inwestując w daną klasę aktywów żądamy premii za ryzyko związanej z ryzykiem systematycznym (1p),
d) Wyjaśnij w jaki sposób ryzyko niesystematyczne jest wyceniane w modelu CAPM (1p).

Odpowiedzi:

a) Koszt emisji obligacji = 3%.
Koszt emisji akcji zgodnie z CAPM = 3%+1.4*(6%-3%) = 7.20%.
WACC = 1/3*7.20%+2/3*3% = 4.40%.

b) Ponieważ przepływy pieniężne nie są obarczone ryzykiem, do dyskontowania przepływów i oceny inwestycji możemy użyć stopy kosztu kapitału bez dodatkowych narzutów. Zdyskontowana wartość przepływów przy stopie WACC wynosi

$$-500+\frac{100}{1+4.4\%}+\frac{200}{(1+4.4\%)^2}+\frac{300}{(1+4.4\%)^3}=42.93.$$

Spółka powinna realizować nową inwestycję.

c) Zgodnie z modelem CAPM:

$$E(R)-r_f=\beta*\left(E(R_m)-r_f\right),$$

gdzie premia za ryzyko dla inwestora związana z inwestycją w akcję, która przyniesie stopę R, wynosi $E(R) - r_f$. Współczynnik β dany jest wzorem

$$\beta = corr(R, R_m)\frac{SD(R)}{SD(R_m)}.$$

W sytuacji, gdy akcja jest dodatnio skorelowana z portfelem rynkowym o stopie R_m, który opisuje ryzyko systematyczne na rynku finansowym, dostaniemy współczynnik $\beta > 0$, co oznacza, że inwestor żąda dodatniej premii za inwestycję w akcję jako rekompensaty za ryzyko systematyczne.

d) W modelu CAPM zakładamy, że ryzyko niesystematyczne jest w pełni dywersyfikowalne i wyceniamy tylko ryzyko systematyczne.

Zadanie 2.

Rozważamy 5-letnie ubezpieczenie z funduszem inwestycyjnym ze składką jednorazową. Interesuje nas wyłącznie świadczenie związane z dożyciem końca trwania ubezpieczenia i przyjmujemy założenie, że prawdopodobieństwo dożycia wynosi 1. Składka w wysokości 100 wpłacana jest na fundusz w momencie t=0, którego dynamika opisana jest geometrycznym ruchem Browna zgodnie ze wzorem

$$dS(t) = aS(t)dt + bS(t)dW(t),$$

gdzie $a = 5\%, b = 15\%$. Zwroty z funduszu determinują wartość rachunku w ubezpieczeniu. Na końcu każdego roku, z rachunku pobierana jest przez ubezpieczyciela opłata w wysokości 1% wartości rachunku. W momencie końca trwania umowy, ubezpieczyciel wypłaca ubezpieczonemu większą z wartości: wartość rachunku lub wpłaconą składkę. Zobowiązanie ubezpieczyciela jest równe świadczeniu płatnemu na koniec trwania umowy (przy założonym prawdopodobieństwie dożycia równym 1). Na rynku finansowym obserwujemy płaską strukturę terminową i stopa wolna od ryzyka wynosi 3%. Opcje kwotowane na rynku finansowym wyceniane są zgodnie z modelem Blacka-Scholesa. Wszystkie instrumenty finansowe są dostępne i nie ma ograniczeń w handlu na rynku finansowy. Stopa techniczna opublikowana przez KNF wynosi 2%. Podane stopy oprocentowania są stopami oprocentowania ciągłego.

a) Opisz instrumenty finansowe, które replikują przepływ pieniężny z zobowiązania, (1p),
b) Wyznacz wartość zobowiązania w reżimie Wypłacalność II, wykorzystaj najbliższe wartości z tablic rozkładu normalnego (2p),
c) Uzasadnij czy w tym wypadku, zgodnie z zasadami wyceny w reżimie Wypłacalność II, potrzebne jest oddzielne wyznaczenie wartości najlepszego oszacowania zobowiązania (*best estimate*) i marginesu za ryzyko (*risk margin*) (1p),
d) Oceń czy opłata pobierana z rachunku przez ubezpieczyciela jest wystarczająca do pokrycia gwarancji zwrotu wpłaconej składki (1p).

Wskazówka: wzór Blacka Scholesa dla opcji put:

$$Cena\ opcji\ put = -N(-d_1)S(0) + N(-d_2)Ke^{-rT},$$
$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\log\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right), \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Odpowiedzi:

a) Załóżmy, że *S(0)=1*. Wtedy *S(T)* opisuje stopę zwrotu z funduszu w całym okresie trwania umowy. Wartość rachunku *F* w momencie *T* dana jest wzorem

$$F(T) = F(0) * S(T) * (1-p)^T, \quad F(0) = Składka,$$

gdzie *p* oznacza opłatę pobieraną z rachunku. Zobowiązanie ma postać

$$\begin{aligned} H &= \max\big(F(T), F(0)\big) \\ &= \max(F(0) - F(0) * S(T) * (1-p)^T, 0) + F(0) * S(T) * (1-p)^T \\ &= (1-p)^T * F(0) * \max\left(\frac{1}{(1-p)^T} - S(T), 0\right) + F(T). \end{aligned}$$

Przepływ pieniężny z zobowiązania na koniec trwania umowy można zreplikować przy pomocy wartości rachunku i $(1-p)^T$ jednostek opcji put wystawionej na fundusz *S* z ceną wykonania $\frac{S(0)}{(1-p)^T}$ i terminem wykonania *T*.

b) Wyznaczamy wartość zobowiązania na moment *t*=0. Wykorzystując wzór Blacka-Scholesa, wartość 1 jednostki opcji put przy parametrach

$$r = 0.03, \sigma = 0.15, T = 5, K = \frac{1}{(1-1\%)^5}, S(0) = 1,$$

jest równa 0.0849. Wartość gwarancji wynosi $(1-1\%)^5 * 100 * 0.0849 = 8.07$. Wartość rachunku wynosi $100 * (1-1\%)^5$=95.09, ponieważ cena *S(T)* jest równa *S(0)=1*. Wartość zobowiązania jest równa 8.07+95.09=103.16.

c) Ponieważ przepływ finansowy może być doskonale zreplikowany, nie ma potrzeby oddzielnego wyznaczania wartości najlepszego oszacowania zobowiązania i marginesu za ryzyko (ROZPORZĄDZENIE DELEGOWANE KOMISJI (UE) 2015/35 – art. 77). Wyznaczona powyżej cena jest ceną rynkową zobowiązania. Nie wykorzystujemy do wyceny stopy technicznej publikowanej przez KNF.

d) Opłata pobierana z rachunku przez ubezpieczyciela nie jest wystarczająca do pokrycia gwarancji zwrotu wpłaconej składki ponieważ wartość zobowiązania przekracza wartość wpłaconej składki (przy zadanej opłacie nie posiadamy wystarczających środków do konstrukcji portfela replikującego gwarancję).

Zadanie 3.

Rozważamy uproszczony model wewnętrzny w reżimie Wypłacalność II, w którym rozważamy wyłącznie ryzyko rezerw pochodzące z jednego roku szkodowego. Stosujemy model Incremental Loss Ratio, w którym skumulowane wypłaty $(C_i, i = 0, \dots, n)$, w przyszłych latach kalendarzowych i, opisane są wzorem: $C_0 = 300$, $C_i = C_{i-1} + X_i$, gdzie $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ są niezależne oraz

Rok kalendarzowy i	μ_i	σ_i
1	100	30
2	60	20
3	20	10

Podane oszacowania (μ_i, σ_i^2) są oszacowaniami *best estimate* dla rozkładów szkód i nie zmieniają się w kolejnych latach kalendarzowych. Na rynku finansowym obserwujemy płaską strukturę terminową i roczna stopa wolna od ryzyka wynosi 3%. Stopa techniczna opublikowana przez KNF wynosi 2% w stosunku rocznym.

a) Wyznacz wymóg kapitałowy dla ryzyka rezerw w modelu wewnętrznym w reżimie Wypłacalność II, zapisz i uzasadnij stratę, której ryzyko oceniasz, oraz miarę ryzyka, którą zastosujesz (2p),
b) Wyznacz wartość zobowiązania na szkody niewypłacone w reżimie Wypłacalność II, w tym wyznacz wartość najlepszego oszacowania (*best estimate*) i margines ryzyka (*risk margin*) przy koszcie kapitału równym 6%. Wymogi kapitałowe dla ryzyka rezerw, które wykorzystasz do marginesu ryzyka, należy wyznaczyć dokładnie zgodnie z rozkładem straty w kolejnych latach kalendarzowych. Obliczenia należy uzasadnić (3p).

Odpowiedzi:

a) W reżimie Wypłacalność II mierzymy ryzyko straty jednorocznej w najbliższym roku kalendarzowym przy pomocy miary Value-at-Risk ustalonej na poziomie kwantyla rzędu 99.5% rozkładu straty. Stratę w roku kalendarzowym t możemy zdefiniować jako

$$L_t = E[C_n - C_{t-1} | t+1] - E[C_n - C_{t-1} | t],$$

gdzie $E[.|s]$ oznacza wycenę przepływów z perspektywy początku roku kalendarzowego s. W naszym przypadku, przy zadanych założeniach, mamy

$$L_t = E\left[X_t + \textstyle\sum_{i=t+1}^{n} \frac{X_i}{(1+r)^{i-t}} \middle| t+1\right] - E\left[X_t + \textstyle\sum_{i=t+1}^{n} \frac{X_i}{(1+r)^{i-t}} \middle| t\right]$$
$$= X_t - E(X_t) \sim N(0, \sigma_t^2).$$

W powyższej definicji przyjęto założenie, że przepływy pojawiają się na początku roku kalendarzowego. Inne definicje straty, uwzględniające wartość pieniądza w czasie w inny sposób, także były dopuszczalne.

Wymóg kapitałowy na najbliższy rok kalendarzowy 1 jest równy $SCR(1) = VaR_{99.5\%}(L_1) = 2.57 * 30 = 77.27$.

b) Wartość najlepszego oszacowania na szkody niewypłacone wynosi

$$100 + \frac{60}{1+3\%} + \frac{20}{(1+3\%)^2} = 177.10.$$

Wartość marginesu ryzyka wynosi

$$RM = CoC * \sum_{i=1}^{n} \frac{SCR(i)}{\left(1+r_f\right)^i} = 6\% * \left(\frac{30 * 2.57}{1+3\%} + \frac{20 * 2.57}{(1+3\%)^2} + \frac{10 * 2.57}{(1+3\%)^3}\right)$$
$$= 8.83,$$

gdzie wykorzystano wartości wymogów kapitałowych w kolejnych latach kalendarzowych obliczone analogicznie jak dla roku 1. Wartość zobowiązania na szkody niewypłacone wynosi 177.10+8.83=185.93. Nie wykorzystujemy do wyceny stopy technicznej publikowanej przez KNF.

Zadanie 4.

Wymień, i krótko opisz, 5 zadań funkcji aktuarialnej zgodnie z Rozporządzeniem Delegowanym Wypłacalność II (5p).

Odpowiedzi:

Artykuł 272 Rozporządzenia Delegowanego.

Zadanie 5.

Wytłumacz krótko pojęcia:

a) Reasekuracja czynna i bierna (2p),
b) Reasekuracja kwotowa (1p),
c) Reasekuracja ekscedentowa (1p),
d) Reasekuracja nadwyżki szkody (1p).

Odpowiedzi:

Rozdział 10.2, Ubezpieczenia, Handschke. Monkiewicz, Poltext, 2010, książka z literatury obowiązującej do egzaminu z Zarządzania Ryzykiem w dn. 12 kwietnia 2022.

Zadanie 6.

Firma ubezpieczeniowa przygotowała bilans w reżimie Wypłacalność II na koniec 2021r. Wyznaczyła wartość najlepszego oszacowania zobowiązań (*best estimate*) równą 200, margines ryzyka (*risk margin*), przy koszcie kapitału 6%, równy 15, kapitałowy wymóg wypłacalności równy 90 oraz wielkość środków własnych (nadwyżka aktywów nad wartość zobowiązań) równą 100. Firma wykorzystuje Formułę Standardową. Na rynku finansowym obserwujemy płaską strukturę terminową i stopa wolna od ryzyka wynosi 2% na koniec 2021. Wartość najlepszego oszacowania przepływu pieniężnego w roku 2022, które jest uwzględnione w najlepszym oszacowaniu zobowiązania na koniec 2021, wynosi 100 (zakładamy, że przepływ następuje na końcu roku, przed wyceną zobowiązania na koniec 2022). Na koniec roku 2022 okazało się, że przepływ pieniężny w roku 2022 wyniósł 150, zamiast oczekiwanych 100, i aktuariusz postanowił zmienić założenia wyceny, co skutkowało zwiększeniem najlepszego oszacowania zobowiązań i kapitałowego wymogu wypłacalności na koniec 2022 o 25% w porównaniu z oszacowaniem, które zostałoby policzone na koniec 2022 przy parametrach ustalonych na koniec 2021. Struktura terminowa stóp procentowanych nie zmieniła się.

a) Wyznacz wartość najlepszego oszacowania zobowiązań na koniec 2022 (1p),
b) Wyznacz margines ryzyka na koniec 2022 (1p),
c) Wyznacz wielkość środków własnych na koniec 2022, przyjmując założenie, że aktywa lokowane są w instrumenty wolne od ryzyka (2p),
d) Przyjmując założenie, że przepływ pieniężny w roku 2022 pochodzi z rozkładu normalnego o odchyleniu 30, oblicz prawdopodobieństwo zrealizowanego scenariusza i wyraź je jako częstość roczną (1p).

Odpowiedzi:

a) Wartość najlepszego oszacowania wyznaczamy zgodnie ze wzorem

$$V_0 = \frac{E(C_1) + V_1}{1 + r_f}.$$

Wartość najlepszego oszacowania na koniec 2022 przed zmianą założeń wyceny wynosi V_1 =200*(1+2%)-100=104. Po zmianie założeń wyceny, wynosi 104*1.25=130.

b) Wartość marginesu ryzyka wyznaczamy zgodnie ze wzorem

$$RM_0 = \frac{CoC * SCR(1) + RM_1}{1 + r_f}.$$

Wartość marginesu ryzyka na koniec 2022 przed zmianą założeń wyceny wynosi RM_1 =15*(1+2%)-6%*90=9.90. Po zmianie założeń wyceny, wynosi 9.90*1.25-12.37.

c) Wartość środków własnych na koniec 2021 wynosi 100. Środki własne rosną zgodnie ze stopa zwrotu o wartość 2%*100=2. Środki własne są również powiększane o wartość środków uwalnianą z marginesu ryzyka, czyli 6%*90=5.40. Jednocześnie, środki własne są pomniejszane o zmianę wartości najlepszego oszacowania zobowiązań związaną ze zmianą założeń wyceny, czyli są pomniejszane o 130-104+12.37-9.90=28.47, jak również o różnicę pomiędzy realizacją przepływu a jego oczekiwaną wartością w 2022, czyli są pomniejszane o 150-100=50. Wartość środków własnych na koniec 2022 wynosi 100+2+5.40-28.47-50=28.92.

d) Wyznaczamy

$$\Pr(X_1 > 150) = \Pr\left(Z > \frac{150 - 100}{30}\right) = 1 - \phi(1.66) = 0.047,$$

czyli scenariusz raz na 21 lat.

Zadanie 7.

Rozważamy ryzyko składki i rezerw w reżimie Wypłacalność II w segmencie ubezpieczenia odpowiedzialności cywilnej z tytułu użytkowania pojazdów mechanicznych (segment 1) oraz w segmencie ubezpieczenia od ognia i innych szkód rzeczowych (segment 4). Miary wielkości ryzyka składki wynoszą, odpowiednio, 500 i 1000, odchylenia standardowe ryzyka składki wynoszą 10% i 8%, miary wielkości ryzyka rezerw wynoszą 100 i 200, odchylenia standardowe ryzyka rezerw wynoszą 9% i 10%, współczynnik korelacji pomiędzy ryzykiem składki i rezerw w obrębie każdego z segmentów wynosi 0.5, współczynnik korelacji pomiędzy segmentami wynosi 0.25. Stosujemy agregację hierarchiczną zgodnie z Formułą Standardową. Na pierwszym poziomie agregujemy ryzyko składki z ryzykiem rezerw dla każdego segmentu oddzielnie, na kolejnym poziomie agregujemy ryzyko składki i rezerw pomiędzy segmentami.

a) Wyznacz wymóg kapitałowy dla ryzyka składki i rezerw dla dwóch segmentów łącznie zgodnie z Formułą Standardową (3p),
b) Wyznacz efekt dywersyfikacji pomiędzy najwyższym poziomem a najniższym poziomem oceny ryzyka (1p),
c) Podpisano reasekurację nieproporcjonalną w segmencie 4. Umowa zmniejszy wymóg kapitałowy netto dla ryzyka składki i rezerw. Wyjaśnij czy umowa z reasekuratorem wpłynie w jakiś inny sposób na całkowity kapitałowy wymóg wypłacalności netto dla spółki wyznaczony zgodnie z Formułą Standardową, tzn. czy należy uwzględnić umowę z reasekuratorem w jakimś innym module Formuły Standardowej (1p).

Odpowiedzi:

a) Wymóg kapitałowy dla segmentu I:

$$3 * \sqrt{(500 * 0.1)^2 + (100 * 0.09)^2 + 2 * 500 * 0.1 * 100 * 0.09 * 0.5} = 165.16.$$

Wymóg kapitałowy dla segmentu II:

$$3 * \sqrt{(1000 * 0.08)^2 + (200 * 0.1)^2 + 2 * 1000 * 0.08 * 200 * 0.1 * 0.5} = 274.95.$$

Wymóg kapitałowy dla segmentu I i II:

$$\sqrt{(165.16)^2 + (274.95)^2 + 2 * 165.16 * 274.95 * 0.25} = 354.38.$$

Zamiast współczynnika 3 można było wykorzystać wartość 2.57.

b) Efekt dywersyfikacji wynosi

$$1 - \frac{354.38}{3 * (500 * 0.1 + 100 * 0.09 + 1000 * 0.08 + 200 * 0.1)} = 25.7\%$$

c) Umowę z reasekuratorem należy uwzględnić w module ryzyka niewykonania zobowiązania przez kontrahenta.

Zadanie 8.

Firma ubezpieczeniowa posiada zobowiązanie równe 200 z terminem wykonania równym 10 lat. Firma ubezpieczeniowa rozważa zakup 3-letniej obligacji o wartości wykupu 100 i rocznych kuponach równych 5% (płatnych na koniec roku), zerokuponowej 7-letniej obligacji o wartości wykupu 100 i zerokuponowej 15-letniej obligacji o wartości wykupu 100. Na rynku finansowym obserwujemy płaską strukturę terminową i roczna stopa wolna od ryzyka wynosi 4%.

a) Wyprowadź i wyznacz miarę duration dla kuponowej 3-letniej obligacji (1p),
b) Wyprowadź i wyznacz miarę convexity dla kuponowej 3-letniej obligacji (1p),
c) W celu zabezpieczenia zobowiązania, firma konstruuje portfel zabezpieczający dopasowując wartości aktywów i zobowiązań, miary duration i convexity dla aktywów i zobowiązań. Zapisz odpowiednie równania pozwalające wyznaczyć liczby obligacji, które powinny być zakupione, nie musisz rozwiązywać układu równań (2p),
d) Uzasadnij przy jakich zmianach struktury stóp procentowych na rynku finansowym powyższa strategia jest strategią zabezpieczającą zmianę wartości zobowiązania ze względu na zmianę stóp procentowych (1p).

Odpowiedzi:

a) Cenę obligacji kuponowej wyznaczamy zgodnie ze wzorem

$$PV(i) = \sum_{t=1}^{n} \frac{CF(t)}{(1+i)^t} = \frac{5}{1+4\%} + \frac{5}{(1+4\%)^2} + \frac{105}{(1+4\%)^3} = 102.77$$

Miara duration dla obligacji

$$\frac{dPV(i)}{di} = -\frac{1}{1+i}\sum_{t=1}^{n} \frac{t*CF(t)}{(1+i)^t}$$
$$= -\frac{1}{1+4\%} * \left(\frac{1*5}{1+4\%} + \frac{2*5}{(1+4\%)^2} + \frac{3*105}{(1+4\%)^3}\right) = -282.77$$

b) Miara convexity dla obligacji

$$\frac{d^2PV(i)}{di^2} = \frac{1}{(1+i)^2}\sum_{t=1}^{n} \frac{t*(t+1)*CF(t)}{(1+i)^t}$$
$$= \frac{1}{(1+4\%)^2} * \left(\frac{1*2*5}{1+4\%} + \frac{2*3*5}{(1+4\%)^2} + \frac{3*4*105}{(1+4\%)^3}\right) = 1070.16$$

Alternatywnie, można było policzyć zmodyfikowaną (modified) lub Macaulay duration i convexity.

c) Niech *a* oznacza liczbę 3-letnich obligacji, *b* – liczbę 7-letnich obligacji, *c* – liczbę 15-letnich obligacji. Rozwiązujemy układ równań, gdzie poszczególne równania odzwierciedlają ceny, miary duration i convexity dla obligacji i zobowiązania:

$$\frac{200}{(1+4\%)^{10}} = a*102.77 + b*\frac{100}{(1+4\%)^{7}} + c*\frac{100}{(1+4\%)^{15}},$$
$$\frac{10*200}{(1+4\%)^{11}} = a*282.77 + b*\frac{7*100}{(1+4\%)^{8}} + c*\frac{15*100}{(1+4\%)^{16}},$$
$$\frac{10*11*200}{(1+4\%)^{12}} = a*1070.16 + b*\frac{7*8*100}{(1+4\%)^{9}} + c*\frac{15*16*100}{(1+4\%)^{17}}.$$

d) Powyższe miary duration i convexity zakładają równoległe zmiany struktury terminowej stóp procentowych. Powyższa strategia jest strategią zabezpieczającą przy (infinitezymalnie) małych równoległych zmianach struktury terminowej stóp procentowych.

Zadanie 9.

Firma ubezpieczeniowa posiada zobowiązanie, które ma postać opcji put z ceną wykonania 100 i terminem wykonania 10 lat. Wartość zobowiązania wyceniana jest zgodnie z modelem Blacka-Scholesa przy aktualnych wartościach parametrów stopy procentowej, zmienności i ceny indeksu bazowego. Aktualna cena indeksu bazowego wynosi 100, aktualna zmienność indeksu bazowego wynosi 20%. Na rynku finansowym obserwujemy płaską strukturę terminową i aktualna stopa wolna od ryzyka wynosi 3% (oprocentowanie ciągłe). Firma postanawia skonstruować portfel zabezpieczający zobowiązanie. Na rynku finansowym dostępny jest rachunek bankowy, płacący stopę wolną od ryzyka aktualną w dniu inwestycji, indeks bazowy oraz płynna obligacja 12-letnią bez ryzyka kredytowego z wartością wykupu 100.

a) Podaj skład portfela zabezpieczającego i wyznacz strategię delta-rho hedgingową (liczbę instrumentów), gdzie dopasowujemy wartości aktywów i zobowiązań, parametry greckie delta (wrażliwość względem zmiany ceny indeksu bazowego) i rho (wrażliwość względem zmiany stopy procentowej) dla wartości aktywów i zobowiązań, wykorzystaj najbliższe wartości z tablic rozkładu normalnego (3p),
b) Wyjaśnij czy możemy stosować powyższą strategię przez cały okres do momentu wykonania zobowiązania (1p),
c) Wyjaśnij jakie skutki, zgodnie z Twoimi oczekiwaniami, będzie miało zastosowanie prostszej strategii delta hedgingowej, zamiast strategii delta-rho, na poziom wymogu kapitałowego dla ryzyka rynkowego w reżimie Wypłacalność II (1p).

Wskazówka: wzór Blacka Scholesa dla opcji put:

$$Cena\ opcji\ put = -N(-d_1)S(0) + N(-d_2)Ke^{-rT},$$
$$Delta\ opcji\ put = -N(-d_1), \qquad Rho\ opcji\ put = -N(-d_2)KTe^{-rT}$$
$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\log\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right), \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Odpowiedzi:

a) Wykorzystując wzór Blacka-Scholesa, możemy wyznaczamy cenę opcji put oraz wartości parametrów delta i rho dla tej opcji podstawiając

$$r = 0.03, \sigma = 0.2, K = 100, T = 10, S(0) = 100.$$

Cena opcji = 10.93, delta = -0.21, rho = -323. 87.
Zmiana (wrażliwość) wartości ceny obligacji zero-kuponowej z terminem wykupu T ze względu na zmianę stopy procentowej, czyli parametr rho dla obligacji, wynosi

$$\frac{d}{dr}(e^{-rT}) = -Te^{-rT}.$$

b) Niech a oznaczę liczbę indeksów bazowych, b – liczbę obligacji, c – wartość środków na rachunku bankowym. Rozwiązujemy układ równań, gdzie poszczególne równania odzwierciedlają ceny, parametry delta i rho dla instrumentów w portfelu zabezpieczającym i zobowiązania:

$$10.93 = a * 100 + b * \frac{100}{e^{12*3\%}} + c,$$
$$-0.21 = a,$$
$$-323.87 = -12 * b * \frac{100}{e^{12*3\%}}.$$

Dostajemy $a = -0.21, b = 0.38, c = 5.39$.

c) Powyższa strategia zabezpieczająca powinna być modyfikowana ponieważ wyznaczone pozycje w instrumentach finansowych zależą od czynników finansowych (stopa procentowa, cena indeksu bazowego) i czasu do wykonania zobowiązania, które zmieniają się w trakcie trwania kontraktu.

d) Strategia delta hedgingowa polega na zabezpieczeniu zmian wartości zobowiązania (opcji put) wynikających tylko ze zmiany ceny indeksu bazowego. Ponieważ spodziewamy się, że stopa procentowa również będzie się zmienić, stosując strategię delta hedgingową w mniejszym stopniu dopasowujemy zmiany wartości portfela aktywów do zmian portfela zobowiązań, w konsekwencji spodziewamy się wzrostu wymogu kapitałowego dla ryzyka rynkowego w sytuacji, gdy zastąpimy strategię delta-rho hedgingową strategią delta hedgingową.

Zadanie 10.

Rozważmy dwa ryzykowne aktywa i jedno aktywo wolne od ryzyka dostępne na rynku finansowym. Ryzykowne aktywa mają oczekiwane stopy zwroty - 3% i 5%, odchylenia standardowe stóp zwrotu - 10% i 15% i współczynnik korelacji Pearsona pomiędzy stopami zwrotu równy 25%. Stopa wolna od ryzyka wynosi 2%. Rozważamy problem wyboru portfela Markowitza.

a) Wyprowadź i wyznacz alokację środków (w procentach) pomiędzy aktywa ryzykowne i wolne od ryzyka, przy której otrzymamy najmniejsze ryzyko inwestycyjne mierzone odchyleniem standardowym straty z inwestycji (strata z inwestycji mierzona jest stopą zwrotu z inwestycji) przy zadanej wartości oczekiwanej stopy zwrotu z inwestycji równej 4% (3p),
b) Wyjaśnij pojęcie krzywej portfeli efektywnych (1p),
c) W problemie wyboru portfela, zdecydowano się zmienić miarę ryzyka straty z inwestycji z odchylenia standardowego na miarę Value-at-Risk na poziomie 0.95. Podaj założenie dotyczące dwu-wymiarowego rozkładu stóp zwrotu dla ryzykownych aktywów (rozkłady brzegowe i struktura zależności), przy którym wyznaczona powyżej strategia alokacji środków będzie nadal optymalna dla inwestora z nowym kryterium minimalizacji ryzyka. Odpowiedź uzasadnij (1p).

Odpowiedzi:

a) Niech a oznacza procentowy udział środków zainwestowanych w pierwsze ryzykowne aktywo, b – procentowy udział środków zainwestowanych w drugie ryzykowne aktywo. Reszta środków inwestowana jest w aktywo wolne od ryzyka. Rozwiązujemy problem optymalizacyjny

$$a^2 * 0.1^2 + b^2 * 0.15^2 + 2 * a * 0.1 * b * 0.15 * 0.25 \rightarrow min$$

p.w.

$$a * 0.03 + b * 0.05 + (1 - a - b) * 0.02 = 0.04.$$

Stosując metodę mnożników Lagrange'a, dostajemy

$$a = 25\%, b = 58.3\%.$$

b) Krzywa portfeli efektywnych jest to krzywa, przedstawiona w układzie współrzędnych, gdzie na osiach mamy wartości oczekiwane i odchylenia standardowe stóp zwrotu z portfeli, na której znajdują się portfela efektywne o minimalnym odchyleniu standardowym straty przy zadanej wartości oczekiwanej stopy zwrotu z portfela. Racjonalny inwestor wybiera tylko portfele efektywne leżące na krzywej portfeli efektywnych w przestrzeni wszystkich portfeli.

c) Jeżeli założymy, że rozkład stopy zwrotu z inwestycji w ryzykowne aktywa jest rozkładem eliptycznym, wtedy minimalizacja miary VaR będzie tożsama z minimalizacją odchylenia standardowego przy zadanej wartości oczekiwanej stopy zwrotu z inwestycji (z własności rozkładów eliptycznych). Wystarczyło podać założenie o łącznym rozkładzie normalnym dla stóp zwrotu (X_1, X_2), jako szczególnym przypadku rozkładów eliptycznych, i pokazać, że

$$
\begin{aligned}
VaR_p(aX_1 + bX_2 + (1-a-b)*r) &= a*\mu_1 + b*\mu_2 + (1-a-b)*r \\
&\quad +\phi^{-1}(p)*\sqrt{a^2*\sigma_1^2 + b^2*\sigma_2^2 + 2*a*b*\sigma_1*\sigma_2*\rho} \\
&= E[aX_1 + bX_2 + (1-a-b)*r] \\
&\quad +\phi^{-1}(p)*SD[aX_1 + bX_2 + (1-a-b)*r].
\end{aligned}
$$

Sesja egzaminacyjna w dniu 12 kwietnia 2022 r.

Zarządzanie ryzykiem zakładu ubezpieczeń

Arkusz ocen

Zadanie nr	Punktacja
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	