

Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXXIV Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 11 kwietnia 2022r.

**Matematyka pozostałych ubezpieczeń osobowych i
majątkowych**

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1. Na koniec roku 2021 analizujemy dane dotyczące pewnej grupy ubezpieczeń o łącznej wartości szkód, które zaszły w latach 2018-2021.

W poniższej tabeli w komórce (t, j) znajduje się zagregowana wartość szkód zaszłych w roku t , które zostały zlikwidowane w ciągu roku $(t + j)$.

opóźnienie w latach j	0	1	2	3
rok zajścia szkody t				
2018	1800	700	500	150
2019	1850	750	520	
2020	1950	790		
2021	2000			

Oblicz (stosując standardową metodę Chain-Ladder) wartość tej części rezerwy na odszkodowania i świadczenia, która odpowiada szkodom do zlikwidowania w ciągu roku 2022.

Przyjmij założenie, że proces zgłaszania i likwidacji szkód w tej grupie ubezpieczeń zamyka się w pełni w okresie trzyletnim.

Ww. część rezerwy wynosi:

- (A) 1460.0
- (B) 1504.0
- (C) 1542.5
- (D) 1579.2
- (E) 1620.8

Zadanie 2.

W pewnym ubezpieczeniu może dojść do co najwyżej jednej szkody w ciągu roku. U ubezpieczonych występuje zjawisko „usypiania czujności”. Przejawia się ono w tym, że prawdopodobieństwo że ubezpieczony dozna szkody w danym roku, jest mniejsze po roku szkodowym niż po roku bezszkodowym.

Jeśli więc oznaczymy przez N_t liczbę szkód w roku t , to zjawisko usypiania czujności polega na tym, że $\Pr(N_t = 1 | N_{t-1} = 1) < \Pr(N_t = 1 | N_{t-1} = 0)$.

Przyjmijmy, że:

$$\Pr(N_t = 1 | N_{t-1}, N_{t-2}, N_{t-3}, \dots) = \Pr(N_t = 1 | N_{t-1}), \text{ oraz iż:}$$

$$\Pr(N_t = 1 | N_{t-1} = 1) = 1/10,$$

$$\Pr(N_t = 1 | N_{t-1} = 0) = 3/10,$$

Wobec tego $\lim_{t \rightarrow \infty} \Pr(N_t = 1)$ wynosi:

- (A) 1/8
- (B) 1/7
- (C) 1/6
- (D) 1/5
- (E) 1/4

Zadanie 3.

Każde ryzyko z pewnej populacji ryzyk generuje szkody zgodnie z procesem Poissona z parametrem intensywności λ . Zróżnicowanie wartości parametru λ w populacji dane jest gęstością:

$$f(x) = \frac{1}{2} x^2 \cdot \exp(-x)$$

Niech $T(t)$ oznacza chwilę wystąpienia pierwszej szkody po momencie t dla losowo wybranego z tej populacji ryzyka.

Wobec tego $E\{T(0) - 1 | T(0) > 1\}$ wynosi:

- (A) 9/6
- (B) 10/6
- (C) 11/6
- (D) 2
- (E) 13/6

Zadanie 4.

Rozważamy klasyczny proces nadwyżki:

$U(t) = u + ct - S_{N(t)}$, gdzie:

- ct jest sumą składek zgromadzonych do momentu t ,
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności $\lambda=1$,
- $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ jest sumą wartości n pierwszych szkód
- wartości szkód Y_1, Y_2, Y_3, \dots są i.i.d, niezależne od procesu $N(t)$

Wartość pojedynczej szkody ma rozkład odwrotny gaussowski o gęstości określonej na półosi dodatniej wzorem:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y^3}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{y} - 2\right)\right]$$

Jeśli założymy, że współczynnik dopasowania R (*adjustment coefficient*) ma wynosić 0.18, to intensywność składki c powinna wynieść (z dobrym przybliżeniem):

- (A) 1.22
- (B) 1.23
- (C) 1.24
- (D) 1.25
- (E) 1.26

Zadanie 5.

Wartość pojedynczej szkody ma rozkład ucięty Pareto o dystrybuancie:

$$F(y) = \begin{cases} \frac{y}{1+y} & \text{gdy } y < 100 \\ 1 & \text{gdy } y \geq 100 \end{cases}$$

Współczynnik zmienności (stosunek odchylenia standardowego do wartości oczekiwanej) tego rozkładu z dobrym przybliżeniem wynosi:

- (A) 2.82
- (B) 2.91
- (C) 3.00
- (D) 3.09
- (E) 3.18

Zadanie 6.

Rozważamy klasyczny proces nadwyżki ubezpieczyciela z czasem ciągłym postaci:

$$\bullet \quad U(t) = u + c \cdot t - S(t),$$

gdzie $S(t)$ jest złożonym procesem Poissona z parametrem częstotliwości λ , oraz dwupunktowym rozkładem wartości pojedynczej szkody Y , takim, że:

$$\bullet \quad \Pr(Y = 1) = \frac{2}{3},$$

$$\bullet \quad \Pr(Y = 2) = \frac{1}{3}.$$

Wiemy, że funkcja prawdopodobieństwa ruiny w nieskończonym horyzoncie czasu $\Psi(u)$ jest dla dowolnego kapitału początkowego $u \geq 0$ obustronnie ograniczona:

$$\bullet \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{u+2} \leq \Psi(u) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^u.$$

Wobec tego składka c przypadająca na jednostkowy okres czasu wynosi:

(A) $\frac{\lambda}{2\ln\frac{3}{2}}$

(B) $\frac{4\lambda}{3\ln\frac{3}{2}}$

(C) $\frac{3\lambda}{4\ln\frac{3}{2}}$

(D) $\frac{2\lambda}{3\ln\frac{3}{2}}$

(E) $\frac{\lambda}{\ln\frac{3}{2}}$

Zadanie 7.

W modelu nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym:

$$U_n = u + nc - (W_1 + W_2 + \dots + W_n)$$

- składka roczna wynosi $c = 5 \times \ln\left(\frac{5}{4}\right)$,
- nadwyżka początkowa wynosi $u = c$,
- a łączne wartości szkód w kolejnych latach W_1, W_2, W_3, \dots są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie wykładniczym o wartości oczekiwanej równej jeden.

Oznaczmy przez N moment ruiny, a więc najmniejszą taką liczbę naturalną n , dla której $U_n < 0$. Oczywiście jeśli nadwyżka nigdy nie przyjmie wartości ujemnej, przyjmujemy $N = \infty$.

Prawdopodobieństwo warunkowe $\Pr(N \leq 2 | N < \infty)$ wynosi (w przybliżeniu):

- (A) 0.25
- (B) 0.27
- (C) 0.29
- (D) 0.31
- (E) 0.33

Zadanie 8.

Ubezpieczeni są losowo dobierani z populacji, w której:

- łączna wartość szkód dla ubezpieczonego charakteryzującego się wartością λ parametru Λ ma złożony rozkład Poissona z oczekiwaną liczbą szkód N równą λ ,
- rozkład wartości pojedynczej szkody jest taki sam dla wszystkich ubezpieczonych, a jego wartość oczekiwana wynosi μ ,
- parametr Λ ma rozkład Gamma (2,5) o wartości oczekiwanej $2/5$ i wariancji $2/25$.

Ubezpieczyciel sprzedaje członkom tej populacji ubezpieczenie w zamian za składkę płaconą z góry w wysokości:

- $110\% \cdot \mu \cdot E(\Lambda | N > 0)$,

a na koniec roku tym ubezpieczonym, którzy nie zgłosili żadnej szkody, **wypłaca bonus** w wysokości:

- $110\% \cdot \mu \cdot \{E(\Lambda | N > 0) - E(\Lambda | N = 0)\}$.

Bonus wynosi:

(A) 0.21μ

(B) 0.22μ

(C) 0.23μ

(D) 0.24μ

(E) 0.25μ

Zadanie 9.

Łączna wartość szkód $X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N$ ma rozkład złożony geometryczny, gdzie liczba szkód ma rozkład:

$$\Pr(N = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

zaś wartość pojedynczej szkody Y_1 ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej 2.

Wobec tego $E(N|X = 2)$ wynosi:

- (A) 15/10
- (B) 14/10
- (C) 13/10
- (D) 12/10
- (E) 11/10

Zadanie 10.

Niech $X = X_0 + X_1$ oznacza łączną wartość szkód zaszłych w ciągu pewnego roku, przy czym X_0 to łączna wartość szkód zlikwidowanych jeszcze przed końcem tego roku, zaś X_1 to łączna wartość szkód które na koniec roku jeszcze nie są zlikwidowane.

Warunkowe rozkłady tych zmiennych losowych przy zadanej wartości θ parametru ryzyka Θ charakteryzują się następującymi momentami:

$$E(X_0|\Theta = \theta) = p \cdot \mu(\theta),$$

$$E(X_1|\Theta = \theta) = q \cdot \mu(\theta),$$

$$\text{var}(X_0|\Theta = \theta) = p \cdot \mu(\theta) \cdot c,$$

$$\text{var}(X_1|\Theta = \theta) = q \cdot \mu(\theta) \cdot c,$$

$$\text{cov}(X_0, X_1|\Theta = \theta) = 0.$$

Rozkład parametru ryzyka jest taki, że:

$$E[\mu(\Theta)] = \mu, \text{ oraz:}$$

$$\text{var}[\mu(\Theta)] = a^2.$$

Zakładamy, że $\Pr[\mu(\Theta) > 0] = 1$, oraz że:

$$c > 0,$$

$$p \in (0, 1),$$

$$q = 1 - p.$$

Zakładamy że znamy wartości parametrów p , c , μ oraz a^2 . Spośród predyktorów zmiennej losowej X_1 postaci:

$$\text{Pred}(X_1|X_0) = \beta_1 X_0 + \beta_0$$

najmniejszym błędem średniokwadratowym obciążony jest predyktor dany wzorem:

(A) $\frac{q}{\mu+pa^2} (a^2 x_0 + \mu c)$

(B) $\frac{q}{\mu+pa^2} (a^2 x_0 + \mu c^2)$

(C) $\frac{q}{\mu c+pa^2} (a^2 x_0 + \mu c^2)$

(D) $\frac{q}{\mu c+pa^2} (a^2 x_0 + \mu^2 c^2)$

(E) $\frac{q}{\mu c+pa^2} (a^2 x_0 + \mu^2 c)$

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 11 kwietnia 2022r.

Matematyka pozostałych ubezpieczeń osobowych i majątkowych

Arkuszu odpowiedzi*

Imię i nazwisko :K L U C Z O D P O W I E D Z I.....

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	B	
2	E	
3	D	
4	B	
5	A	
6	C	
7	C	
8	D	
9	A	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna