

Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXXIV Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 11 kwietnia 2022r.

Matematyka finansowa

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.

Rozważmy rynek, na którym cena zakupu pewnego indeksu I w chwili $t = 0$ wynosi 99.5 PLN, podczas gdy cena sprzedaży tego indeksu wynosi 100.5 PLN. Dla indeksu I wypłacana jest dywidenda w wysokości 0.70% w skali roku (kapitalizacja ciągła). Na rynku dostępne są także dwuletnie kontrakty forward na indeks I .

Inwestor analizuje możliwość zrealizowania strategii arbitrażowej w oparciu o indeks I , przy zastosowaniu strategii *cash-and-carry* (zakup indeksu i równoczesna krótka sprzedaż kontraktu forward na indeks) lub *reverse cash-and-carry* (krótka sprzedaż indeksu oraz równoczesny zakup kontraktu forward na indeks). Aby zastosować strategię arbitrażową inwestor może pozyskać z rynku dodatkowe środki (oprocentowane w sposób ciągły po stopie 3.30% w skali roku), lub też może sam użyczać środki, uzyskując oprocentowanie 3.00% w skali roku (kapitalizacja ciągła). Zarówno zakup jak i krótka sprzedaż dwuletniego kontraktu forward na indeks I obciążone są dodatkowo kosztami transakcyjnymi w kwocie 2 PLN. Zakup i krótka sprzedaż indeksu I nie są obciążone dodatkowymi kosztami transakcyjnymi.

Proszę określić przedział dla ceny kontraktu forward w PLN w chwili $t = 0$, dla którego dla wskazanej sytuacji rynkowej inwestor nie będzie w stanie uzyskać zysku arbitrażowego, stosując strategię *cash-and-carry* lub *reverse cash-and-carry* (proszę podać najbliższą odpowiedź):

- (A) (103.06; 110.50)
- (B) (101.06; 109.50)
- (C) (102.06; 109.50)
- (D) (102.06; 108.00)
- (E) (101.06; 108.00)

Zadanie 2.

Rozważmy proces Z_t zadany następującym równaniem:

$$dZ_t = a dt + b dB_t, \quad a, b > 0,$$

gdzie B_t jest standardowym procesem Browna.

Założmy, że proces X_t zdefiniowany jest jako:

$$X_t = e^{cZ_t}, \quad c > 0.$$

Proszę wskazać, które z równań definiuje postać dX_t .

(A) $dX_t = \left(ac + \frac{b^2 c^2}{2}\right) X_t dt + bc X_t dB_t$

(B) $dX_t = \left(bc + \frac{b^2 c^2}{2}\right) X_t dt + ac X_t dB_t$

(C) $dX_t = ac X_t dt + \left(bc + \frac{b^2 c^2}{2}\right) X_t dB_t$

(D) $dX_t = ab X_t dt + \left(ac + \frac{b^2 c^2}{2}\right) X_t dB_t$

(E) Żadna z powyższych

Zadanie 3.

Niech $T_0 = 0$. Rozważmy rynek Blacka-Scholesa, na którym dostępne są niepłacące dywidendy akcje \mathcal{A} o cenie $S_{T_0} = 93$ PLN. Rozważmy binarną opcję kupna z funkcją wypłaty:

$$X_T = \begin{cases} \frac{S_T}{K_1} & S_T \in (K_1, K_2) \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}.$$

Proszę podać cenę dla binarnej opcji kupna w chwili T_0 , zakładając, iż $K_1 = 97$ PLN, $K_2 = 99$ PLN, $r = 2.3\%$, $\sigma = 0.11$, $T = 2$. Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 0.05 PLN
- (B) 0.06 PLN
- (C) 0.07 PLN
- (D) 0.08 PLN
- (E) 0.09 PLN

Zadanie 4.

W uproszczonym modelu rynku papierów wartościowych zakładamy, że stan giełdy opisuje łańcuch Markowa czasu ciągłego o dwóch możliwych stanach – hossa (H) i bessa (B) o prawdopodobieństwach przejść podanych w następującej macierzy

$$P(t) = \begin{pmatrix} p_{HH} & p_{HB} \\ p_{BH} & p_{BB} \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 + 3e^{-7t} & 3 - 3e^{-7t} \\ 4 - 4e^{-7t} & 3 + 4e^{-7t} \end{pmatrix}.$$

W chwili $t = 0$ inwestor lokuje 100 PLN na lokacie o rocznej ciągłej intensywności oprocentowania 3%. W chwili $t = 0$ prawdopodobieństwo bessy na giełdzie ocenia się na dwukrotnie większe niż prawdopodobieństwo hossy.

Jeżeli w chwili $t = \frac{1}{3}$ na giełdzie jest hossa, inwestor rezygnuje z lokaty i kupuje jednostki funduszu inwestycyjnego o rocznej ciągłej intensywności oprocentowania 12%. Jeżeli jest bessa, pozostawia środki na tej samej lokacie.

Analogicznie, jeżeli w chwili $t = \frac{2}{3}$ na giełdzie jest hossa, inwestor kontynuuje inwestycję w fundusz lub przenosi tam środki z lokaty (w zależności od instrumentu, w który były ulokowane uprzednio). W przypadku bessy, inwestor pozostawia środki na lokacie lub przenosi tam środki w funduszu (w zależności od instrumentu, w który były ulokowane uprzednio).

Proszę wyznaczyć wartość oczekiwaną rachunku inwestora po roku licząc od chwili $t = 0$ (proszę podać najbliższą wartość):

- (A) 103.6 PLN
- (B) 104.6 PLN
- (C) 105.6 PLN
- (D) 106.6 PLN
- (E) 107.6 PLN

Zadanie 5.

Na rynku dostępny jest kontrakt na górny pułap stopy procentowej (*interest rate cap*) równy 5% w skali roku, przy kapitalizacji kwartalnej. Zacznie on funkcjonować za rok i ma on zabezpieczyć trzymiesięczną pożyczkę o wartości nominalnej 100 000 PLN.

Założmy, iż:

- kapitalizowana w sposób ciągły aktualna roczna stopa procentowa wynosi 4% w skali roku;
- kapitalizowana kwartalnie stopa procentowa dla okresu trzymiesięcznego rozpoczynającego się za rok wynosi 4.5% w skali roku,
- zmienność kwartalnej terminowej stopy procentowej wynosi 45.75% w skali roku.

Proszę wyznaczyć cenę opcji na górny pułap stopy procentowej (proszę podać najbliższą odpowiedź):

- (A) 140 PLN
- (B) 150 PLN
- (C) 160 PLN
- (D) 170 PLN
- (E) 180 PLN

Zadanie 6.

40-letni kredyt hipoteczny X jest spłacany w równych ratach na koniec kolejnych lat z efektywną stopą oprocentowania $i_1 = 7\%$ w skali roku. Na koniec 20. roku (po zapłaceniu 20-tej raty) kredytobiorca ma możliwość zaciągnięcia dodatkowego kredytu Y w wysokości równej wielkości aktualnego zadłużenia z tytułu kredytu dotychczasowego. Przyjmujemy założenie, że kredytobiorca zawsze skorzysta z tej opcji, o ile będzie wówczas wypłacalny (nie dojdzie wcześniej do jego bankructwa). Dodatkowy kredyt spłacany jest w 20 równych ratach płatnych na koniec kolejnych lat przy tej samej stopie i_1 .

Warunkiem uruchomienia całości kredytu 40-letniego było opłacenie jednorazowej składki (netto) $P = 20\,422$ PLN za ubezpieczenie niewypłacalności kredytobiorcy, skalkulowanej przy rocznej stopie technicznej $i_2 = 4.5\%$. Prawdopodobieństwo bankructwa kredytobiorcy w każdym z lat 1, 2, ..., 40 wynosi 0.3% o ile nie doszło do niego wcześniej (bankructwo jest nieodwracalne i może wystąpić tylko raz). W przypadku bankructwa kredytobiorcy, ubezpieczyciel przejmuje na siebie spłacanie kredytu i musi spłacić wszystkie pozostałe do zapłaty raty w terminach ich płatności (również wynikające z zaciągniętego kredytu dodatkowego, o ile miał miejsce).

Jaka jest kwota zaciągniętego kredytu X? Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 291 000 PLN
- (B) 291 400 PLN
- (C) 291 800 PLN
- (D) 292 200 PLN
- (E) 292 600 PLN

Zadanie 7.

Założmy, że natężenie oprocentowania zadane jest wzorem:

$$\delta_t = \frac{2}{1+2t} + \frac{4}{1+3e^{3t}}$$

Proszę obliczyć efektywną stopę zwrotu w 4. roku trwania inwestycji, to jest w okresie od $t_1 = 3$ do $t_2 = 4$ (proszę podać najbliższą odpowiedź).

Wskazówka: można zauważyć, iż dla $a, b > 0$ zachodzi: $\frac{1}{a} \cdot \frac{b}{1+a} = \frac{b}{a} - \frac{b}{1+a}$

- (A) 22.6%
- (B) 24.6%
- (C) 26.6%
- (D) 28.6%
- (E) 30.6%

Zadanie 8.

Inwestor rozważa zajęcie strategii „bear put spread” zbudowanej w oparciu o europejskie opcje put na akcje X z terminem zapadalności za 0.5 roku. Na rynku można zawierać transakcje na europejskie opcje call i put na akcje X z terminem zapadalności za 0.5 roku, przy czym ceny w PLN dla opcji call przedstawia poniższa tabela:

Cena wykonania opcji	Cena opcji call
210	11
230	9

Założmy, że roczna stopa wolna od ryzyka wynosi 2% (kapitalizacja ciągła).

Które z poniższych twierdzeń jest prawdziwe?

- (A) Strata inwestora dla strategii „bear put spread” jest ograniczona do -20 PLN
- (B) Strata inwestora dla strategii „bear put spread” jest ograniczona do -2.2 PLN
- (C) Zysk inwestora dla strategii „bear put spread” jest ograniczony do 2.0 PLN
- (D) Zysk inwestora dla strategii „bear put spread” jest ograniczony do 2.2 PLN
- (E) Zysk inwestora dla strategii „bear put spread” jest ograniczony do 20 PLN

Zadanie 9.

Zakład ubezpieczeniowy szacuje, że będzie musiał dokonać wypłat w wysokości 1 000 PLN w $t = 1$ oraz w wysokości 3 000 PLN w $t = 4$. W $t = 0$ zarządzający aktywami zakładu chce stworzyć portfel aktywów immunizujący powyższe zobowiązania (przy zmianie stóp procentowych wartość aktywów będzie nadal wystarczająca na pokrycie tych zobowiązań) z przepływami w wysokości X w $t = 2$ oraz w wysokości Y w $t = 3$. Ile powinna wynosić wartość X , jeśli roczna stopa procentowa w całym okresie trwania inwestycji wynosi 20% (proszę podać najbliższą odpowiedź)?

- (A) 286 PLN
- (B) 296 PLN
- (C) 306 PLN
- (D) 316 PLN
- (E) Żadna z powyższych

Zadanie 10.

Kredyt w wysokości 230 000 PLN z oprocentowaniem rocznym 8% zgodnie z pierwotnym planem jest spłacany przez 20 lat przy użyciu wpłat do funduszu umorzeniowego (ang. *sinking fund*) oraz odsetek płatnych na bieżąco, przy czym wpłaty do funduszu i odsetki są płacone na koniec każdego roku. Wpłaty w funduszu są akumulowane stopą 6% w skali roku.

Po dokonaniu pierwszych 5 wpłat nastąpiła modyfikacja planu: stopa akumulacji w funduszu została podniesiona o 1 p.p., a wysokość wpłat do funduszu obniżona tak, aby spłacanie kredytu zakończyło się po 23 latach od wzięcia kredytu. O ile zmieniła się wysokość odsetek netto w całym okresie spłacania kredytu (różnica pomiędzy odsetkami zapłaconymi a odsetkami zakumulowanymi w funduszu) pomiędzy zmodyfikowanym pierwotnym planem spłaty kredytu?

- (A) 20 010 PLN
- (B) 20 110 PLN
- (C) 20 210 PLN
- (D) 20 310 PLN
- (E) 20 410 PLN

Dystrybuanta rozkładu normalnego $N(0,1)$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 11 kwietnia 2022r.

Matematyka finansowa

Arkuszu odpowiedzi*

Imię i nazwisko :

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	D	
2	A	
3	A	
4	D	
5	B	
6	C	
7	D	
8	D	
9	E	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.