Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXXIII Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 4 października 2021r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej ....

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.
Niech $X_1, \dots, X_n, n \geq 4$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $N(\theta, 1)$ (normalmym o średniej θ i wariancji 1). Dla każdego $i \in \{1, \dots, n\}$ zaobserwowano jedynie czy obserwacja była mniejsza od 0 czy nie, a dokładniej:

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } X_i < 0, \\ 0 & \text{jeśli } X_i \geq 0. \end{cases}$$

Oznaczmy $T = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, przez Φ oznaczamy z kolei dystrybuantę rozkładu standardowego normalnego $N(0, 1)$. Na podstawie tak otrzymanych danych estymator parametru θ otrzymany metodą największej wiarogodności wyraża się wzorem:

(A) $\Phi^{-1}\left(\frac{T}{n}\right)$

(B) $-\Phi\left(\frac{T}{n-1}\right)$

(C) $-\Phi^{-1}\left(\frac{T}{n}\right)$

(D) $\Phi\left(\frac{T}{n}\right)$

(E) żadne z powyższych

Zadanie 2.

Wektor losowy (X,Y) ma rozkład ciągły o gęstości

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{dla } \{(x,y) : (x,y) \in (0,1)^2,\ y > x\}, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Jakie jest prawdopodobieństwo, że $\left[\frac{Y}{X}\right]$ jest liczbą nieparzystą? Przez $[z]$ oznaczamy liczbę całkowitą najbliższą liczbie z (przyjmujemy $[n+1/2] = n$ dla liczby całkowitej n).

(A) $\frac{\pi}{2} - 1$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $1 - e^{-4}$

(D) $2 - \frac{\pi}{2}$

(E) $1 - e^{-1}$

Zadanie 3.

Niech X_1 oznacza czas, który upływa od wypadku samochodowego do zgłoszenia szkody, natomiast X_2 oznacza czas, który upływa od zgłoszenia szkody do wypłaty odszkodowania. Oznaczmy $T = X_1 + X_2$ (czas od wypadku do wypłaty odszkodowania). Wektor losowy (X_1, X_2) ma rozkład łączny:

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} \frac{1}{c} & \text{dla } 0 < x_1 < 10,\ 0 < x_2 < 10,\ x_1 + x_2 \leq 12, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

gdzie $c > 0$ jest stałą. Ile wynosi ET?

(A) $\frac{398}{51}$

(B) 8

(C) $\frac{199}{51}$

(D) $\frac{1444}{147}$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 4.

Niech E będzie dyskretną przestrzenią stanów. Dla dwóch rozkładów na tej przestrzeni: $p \equiv \{p(e)\}, q \equiv \{q(e)\}$, $e \in E$ definiujemy normę całkowitego wahania:

$$d_{tv}(p,q) = \frac{1}{2}\sum_{e \in E} |p(e) - q(e)|.$$

Ustalmy $n \geq 3$. Rozważamy zbiór permutacji $\mathcal{S}_n$ zbioru n-elementowego. Niech π oznacza rozkład jednostajny na tych permutacjach, tzn. $\forall \sigma \in \mathcal{S}_n$ mamy $\pi(\sigma) = \frac{1}{n!}$

Pomyślmy o tych permutacjach jako o układach n kart. Rozważmy następującą procedurę tasowania kart, jej jeden krok to:

- Bierzemy kartę, która jest obecnie na samej górze i wkładamy ją losowo (tzn. z prawdopodobieństwem $1/n$) na każdą z możliwych pozycji.

(Dla przykładu, gdy $n = 4$ i startujemy z permutacji $(1,2,3,4)$, to możemy w 1 kroku dojść z prawdopodobieństwem 1/4 do każdej z permutacji $(1,2,3,4)$, $(2,1,3,4)$, $(2,3,1,4)$, $(2,3,4,1)$).

Załóżmy, że startujemy z permutacji identycznościowej $(1,2,\ldots,n)$.
Niech $\rho_2(\cdot)$ oznacza rozkład na permutacjach po wykonaniu dwóch kroków powyższego tasowania kart. Norma całkowitego wahania $d_{tv}(\rho_2, \pi)$ wynosi:

(A) $1 - \frac{1}{(n-1)!}$

(B) $1 - \frac{2}{(n-1)!}$

(C) $1 - \frac{1}{(n-2)!}$

(D) $1 - \frac{2}{n!}$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 5.

Niech X i Y będą dwoma niezależnymi zmiennymi losowymi o standardowym rozkładzie normalnym $N(0,1)$. Zdefiniujmy $M = X + Y, N = X - Y$.

Ile wynosi $E(M^{17}N^{18})$?

(A) $\dfrac{(18)!}{9!2^9}$

(B) 1

(C) $\dfrac{(17)!}{9!2^9}$

(D) 0

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 6.

Pewne urządzenie przestaje działać tylko wtedy, gdy przestają działać jego dwa komponenty. Czasy działania tych komponentów T_1 oraz T_2 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1. Koszt działania urządzenia wyliczony został jako $X = 2T_1 + T_2$. Ile wynosi $\mathrm{Var}(X)$?

(A) 3

(B) 4

(C) 5

(D) 6

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 7.

Wektor losowy (X,Y) ma rozkład łączny o gęstości

$$f(x,y) = \begin{cases} c \cdot x & \text{dla } 0 \le x \le 2,, \quad \max(0, 1-x) \le y \le 2-x, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

gdzie $c > 0$ jest stałą. Wariancja warunkowej zmiennej losowej Y pod warunkiem $X = x$, tj. $Var(Y|X = x)$ dla $x \in (1,2)$ wynosi:

(A) $\dfrac{(2-x)^2}{12}$

(B) $1/12$

(C) $x^2 - 1/6$

(D) $\dfrac{(2-x)^2}{2}$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 8.

Dyskretny wektor losowy (X,Y) ma rozkład łączny $p(x,y)$ dla $x = 0,1$ oraz $y = 0,1,2$. Wiadomo, iż $p(1,2) = 2p(1,1)$ i wartość $p(1,1)$ jest taka, że wariancja zmiennej losowej $Z = XY$ jest największa (zmaksymalizowana).

Ile wynosi prawdopodobieństwo tego, że X lub Y przyjmuje wartość 0?

(A) 0.36

(B) 0.46

(C) 0.54

(D) Brakuje danych, aby wyliczyć to prawdopodobieństwo

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 9.

Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach wykładniczych takich, że $EX = EY = \frac{1}{\lambda} > 0$. Wiadomo również, że $\lambda \neq 1$.

Rozważmy zmienną losową $Z = \frac{X}{X+Y}$. Ile wynosi $Var(Z)$?

(A) $\frac{1}{\lambda+1}$

(B) $\frac{1}{12}$

(C) $\frac{\lambda}{\lambda+1}$

(D) $\frac{1}{2}$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 10.

Zmienne losowe X_1, X_2 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $U(\theta, \theta+1)$, tj. o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(\theta, \theta+1)$, gdzie $\theta > 0$.
Interesuje nas testowanie hipotezy $H_0 : \theta = 0$ przy alternatywie $H_1 : \theta > 0$. Rozważmy 2 testy:

$$\begin{aligned} \phi_1(X_1) \quad &: \quad \text{Odrzucamy } H_0 \text{ jeśli } X_1 > 0.95, \\ \phi_2(X_1, X_2) \quad &: \quad \text{Odrzucamy } H_0 \text{ jeśli } X_1 + X_2 > c. \end{aligned}$$

Ile wynosi stała c jeśli wiadomo, że test ϕ_2 ma taki sam rozmiar jak test ϕ_1?

(A) $2 - \frac{\sqrt{10}}{10}$

(B) 1.5

(C) $1 + \frac{\sqrt{10}}{10}$

(D) $1 + \frac{\sqrt{5}}{4}$

(E) Żadne z powyższych

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 4 października 2021r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	C	
2	A	
3	A	
4	C	
5	D	
6	C	
7	A	
8	B	
9	B	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.