

**Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy**

**LXXXIII Egzamin dla Aktuariuszy**

**Sesja egzaminacyjna w dniu 4 Października 2021r.**

**Matematyka ubezpieczeń na życie**

**Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: .....**

**Czas trwania egzaminu: 100 minut**

**Zadanie 1.**

W modelu ciągłym, ze stałym natężeniem śmiertelności  $\mu = 0,02$  rozważmy potencjalnego klienta zakładu ubezpieczeń. Funkcja użyteczności tego klienta to  $u(x) = x + dx^2$ , gdzie  $d = -\frac{1}{6} \times 10^{-5}$ .

Osoba ta rozważa zakup terminowej renty na życie, płacącej przez 50 lat, ze stałą intensywnością roczną kwotę  $R$ . (Klient ignoruje w swoich rozważaniach wartość pieniądza w czasie, zatem można przyjąć, iż dla jego kalkulacji natężenie oprocentowania  $\delta = 0$ .)

$X$  jest zmienną losową otrzymanych świadczeń rentowych. Dla jakiej wartości  $R$ , wartość oczekiwana  $E[u(X)]$  osiąga maksimum? Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 7 327
- (B) 7 872
- (C) 8 352
- (D) 9 872
- (E) 9 992

**Zadanie 2.**

Dana jest grupa osób w wieku ( $x$ ), której liczność w chwili  $t = 0$  wynosi  $l_x$ . Wiadomo, że  $q_x = 0,00207$ , oraz  $\mu_{x+t} = \frac{q_x}{1-(1-t)q_x}$  dla  $0 < t < 1$ . W przedziale czasowym  $(\frac{3}{12}, \frac{5}{12})$  nastąpiło 5 zgonów. Ile wynosi początkowa liczność tej grupy osób  $l_x$ ?

Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 14 483
- (B) 14 783
- (C) 14 983
- (D) 15 283
- (E) 15 483

**Zadanie 3.**

Rozważmy ubezpieczenie terminowe na życie ( $x$ ) na  $n$  lat, ze stałą sumą ubezpieczenia 100 000 złotych oraz stałą składką netto płaconą z góry, z częstotliwością roczną. Wiemy, że śmiertelność odnotowywana na portfelu zakładu ubezpieczeń wynosi 80% tablic śmiertelności zastosowanych do obliczenia składki netto za to ubezpieczenie.

Dane są:

- stopa techniczna  $i = 2\%$ ,
- składka netto  $P = 310,67$  zł
- obliczona przy założeniu 80% tablic śmiertelności renta  $\ddot{a}'_{x:\overline{n}|} = 12,93674$
- oraz obliczony przy założeniu 80% tablic śmiertelności aktuarialny wskaźnik dyskontujący  ${}_np'_{xv^n} = 0,71415$ .

Zakładając, że rzeczywista stopa zysku z inwestycji będzie równa stopie technicznej, proszę obliczyć wartość obecną zysku technicznego z tytułu śmiertelności osiągniętego przez zakład z tej umowy, na jej początek.

Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 750 zł
- (B) 800 zł
- (C) 850 zł
- (D) 880 zł
- (E) 920 zł

**Zadanie 4.**

Mąż (30) należy do populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym  $\omega_m = 90$ , żona (25) należy do populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym  $\omega_z = 100$ . Proszę obliczyć średni czas przebywania w stanie owdowiałym po śmierci współmałżonka.

Zakładamy, iż  $T(30)$  oraz  $T(25)$  są niezależne, oraz że osoba owdowiała nie wstępuje ponownie w związek małżeński. Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 23,5
- (B) 24,5
- (C) 25,5
- (D) 26,5
- (F) 27,5

**Zadanie 5.**

Rozważamy model ciągły, z intensywnością śmiertelności Weibull'a  $\mu_t = 2t$ , dla  $t > 0$ . Na życie (0) wystawiona została dwudziestoletnia polisa, która opłacana jest składką netto w formie renty ciągłej z roczną intensywnością  $P$ .

W przypadku zgonu osoby ubezpieczonej, wypłacane jest świadczenie  $b_t = S + V_t$ , gdzie  $S$  – stała suma ubezpieczenia,  $V_t$  – rezerwa składki netto.

Zakładając, iż roczne natężenie oprocentowania  $\delta = 0,05$ , proszę podać jaka jest relacja między wielkościami  $S$  oraz  $P$ .

(A)  $P = 20S \times \frac{e^{-2}}{e-1}$

(B)  $P = 20S \times \frac{e^{-1}}{e-2}$

(C)  $P = 40S \times \frac{e^{-2}}{e-1}$

(D)  $P = 40S \times \frac{e^{-1}}{e-2}$

(E)  $P = 40S \times \frac{e^{-1}}{e}$

**Zadanie 6.**

W modelu ciągłym rozważmy ubezpieczenie na całe życie ze stałymi natężeniami śmiertelności oraz całkowitej niezdolności do pracy (NP). W przypadku zgonu ubezpieczonego wypłacana jest  $SU = 100$ . W przypadku wystąpienia zdarzenia całkowitej NP ubezpieczonemu wypłacana jest  $SU_{NP} = 190$ . Wiadomo, iż natężenie śmiertelności osoby całkowicie niezdolnej do pracy wzrasta trzykrotnie. Po przyznaniu świadczenia z tytułu całkowitej NP ochrona z tytułu śmierci **nie** wygasa.

Dane są:

- roczne natężenie oprocentowania  $\delta = 0,02$
- roczne natężenie śmiertelności  $\mu_{x+t} = 0,01$
- oraz roczne natężenie ryzyka całkowitej niezdolności do pracy  $\mu_{x+t}^{NP} = 0,02$ .

Ile wynosi składka jednorazowa netto ( $SJN$ ) za to ubezpieczenie?

Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 105
- (B) 110
- (C) 120
- (D) 126
- (E) 130

**Zadanie 7.**

Spłata kredytu hipotecznego w kwocie  $K = 300\,000$  zł, rozłożona została na 30 lat. Roczna stopa oprocentowania kredytu wynosi  $j = 4\%$ . Kredyt spłacany jest tak, iż na koniec każdego roku spłacana jest kwota  $\frac{1}{30}K$  oraz odsetki naliczane od kwoty zadłużenia z początku roku. Ubezpieczenie kredytu spłaca na koniec roku śmierci kredytobiorcy kwotę  $K \times (1 + j) \times \frac{31-k}{30}$ , gdzie  $k = 1, \dots, 30$  jest rokiem śmierci kredytobiorcy.

Dane są: stopa techniczna  $i = 2\%$ ,  $q = 0,002$ ,  ${}_k p_x = (1 - q)^k$ , dla  $k = 1, \dots, 30$ .

Proszę obliczyć ile wynosi SJN za to ubezpieczenie? Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 6 760
- (B) 6 770
- (C) 7 220
- (D) 7 620
- (E) 7 770



**Zadanie 8.**

W modelu ciągłym rozważmy grupę pięciu osób, z których dwie pochodzą z populacji o stałym natężeniu śmiertelności  $\mu_1 = 0,02$ , a trzy pochodzą z populacji o stałym natężeniu śmiertelności  $\mu_2 = 0,01$ . Roczne natężenie oprocentowania wynosi 2%.

Ubezpieczenie na życie członków tej grupy osób działa w następujący sposób.

- W chwili pierwszego zgonu każdej z osób, które przeżyły wypłacana jest kwota  $5/2$ ;
- W chwili drugiego zgonu każdej z osób, które przeżyły wypłacana jest kwota  $4/2$ ;
- W chwili trzeciego zgonu każdej z osób, które przeżyły wypłacana jest kwota  $3/2$ ;
- W chwili czwartego zgonu osobie, która przeżyła wypłacana jest kwota  $2/2$ .

Zakładamy, iż dwa zgony nie występują równocześnie.

Ile wynosi składka jednorazowa netto (S<sub>JN</sub>) za to ubezpieczenie?

Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 10,44
- (B) 12,51
- (C) 14,11
- (D) 16,35
- (E) 18,36

**Zadanie 9.**

W ubezpieczeniu na życie i dożycie na  $n$  lat, ze stałą roczną składką płatną z góry przez  $n$  lat, dane są następujące wielkości:

- $q_{x+n-2} = 0,00877$ ,  $q_{x+n-1} = 0,00964$ ,
- stopa techniczna  $i = 2\%$ ,
- składka netto 3 600 zł,
- suma ubezpieczenia na życie i dożycie 61 331 zł.

Proszę obliczyć iloraz składki za ryzyko do składki inwestycyjnej  $\frac{\pi_{n-2}^r}{\pi_{n-2}^s}$ .

Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 1,16%
- (B) 1,56%
- (C) 2,16%
- (D) 2,56%
- (E) 3,16%

**Zadanie 10.**

Rozważmy model ciągły pewnego systemu ubezpieczeń społecznych, ze stałymi natężeniami prawdopodobieństw.

Ubezpieczony, od początku okresu zatrudnienia, przez  $N$  lat, aż do osiągnięcia wieku emerytalnego wpłaca składki z roczną intensywnością  $x\%$  wynagrodzenia, chyba, że wcześniej osoba ta umrze lub stanie się niezdolna do pracy (NP). Zakładamy, iż intensywność roczna wynagrodzenia jest stała. W chwili śmierci lub zdarzenia NP system ten zaczyna wypłacać (odpowiednio beneficjentom lub ubezpieczonemu) rentę dożywotnią, której wartość obecna na dzień zdarzenia równa jest wartości zgromadzonego kapitału. W chwili dożycia do wieku emerytalnego, system ubezpieczenia społecznego zaczyna wypłacać ubezpieczonemu, o ile nie wypłaca już renty z tytułu NP, rentę dożywotnią z roczną intensywnością  $y\%$  wynagrodzenia z okresu aktywności zawodowej. Przyjmując oznaczenia:

- $\delta$  - natężenie oprocentowania,
- $\mu^z$  - natężenie śmiertelności,
- $\mu^{np}$  - natężenie prawdopodobieństwa zdarzenia NP,

proszę podać ile wynosi  $\frac{y}{x}$  ?

(Wskazówka: można porównać odpowiednie wartości aktuarialne na moment osiągnięcia wieku emerytalnego.)

(A)  $\frac{e^{\delta N} - 1}{\delta} (\mu^z + \mu^{np})$

(B)  $\frac{e^{\delta N} - 1}{\delta} \mu^z$

(C)  $\frac{e^{\delta N} - 1}{\delta}$

(D)  $\frac{e^{\delta N}}{\delta} (\mu^z + \mu^{np})$

(E)  $\frac{e^{\delta N} - 1}{\delta} (\mu^z + \delta)$

---

**Egzamin dla Aktuariuszy**  
**Sesja egzaminacyjna w dniu 4 października 2021r.**

**Matematyka ubezpieczeń na życie**

**Arkuszu odpowiedzi\***

Imię i nazwisko : .....

Pesel .....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	D	
2	A	
3	B	
4	A	
5	C	
6	C	
7	E	
8	B	
9	A	
10	E	

---

\* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.