Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXXIII Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 4 października 2021r.

Matematyka pozostałych ubezpieczeń osobowych i majątkowych

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: ....

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.
Proces nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym postaci:
$U_n = u + X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \quad n = 0,1,2,\ldots$
ma przyrosty niezależne o tym samym rozkładzie:
$\Pr(X_1 = 1) = q,$
$\Pr(X_1 = -1) = p,$
$\Pr(X_1 = 0) = 1 - p - q,$
a jego parametry spełniają założenia:
$0 < p < q,$
$p + q \leq 1$, oraz
$u = 0.$

Przy tych założeniach prawdopodobieństwo ruiny w nieskończonym horyzoncie czasu dane jest wzorem:

(A) $\frac{p^2}{1-p^2}$

(B) $\frac{p^2}{(1-p)^2}$

(C) $\frac{p^2}{q^2}$

(D) $\frac{p}{1-p}$

(E) $\frac{p}{q}$

Zadanie 2.
Przyjmujemy założenia takie same jak w poprzednim zadaniu, a więc iż proces nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym postaci:
$U_n = u + X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \quad n = 0,1,2, \dots$
ma przyrosty niezależne o tym samym rozkładzie:
$\Pr(X_1 = 1) = q,$
$\Pr(X_1 = -1) = p,$
$\Pr(X_1 = 0) = 1 - p - q,$
a jego parametry spełniają założenia:
$0 < p < q,$
$p + q \leq 1$, oraz
$u = 0.$

Oznaczmy teraz przez N moment ruiny, a więc:

$$N \coloneqq inf\{n = 1,2,3, \dots, \;\; U_n < 0\,\}$$

Oznaczmy dalej przez N^* średni czas oczekiwania na ruinę, pod warunkiem że do ruiny w ogóle dojdzie:

$$N^* \coloneqq \mathrm{E}(N|N < \infty)$$

N^* dany jest wzorem:

(A) $\frac{1}{q-p}$

(B) $\frac{1}{q-p} \cdot \frac{q}{p}$

(C) $\frac{1}{q-p} \cdot \frac{p}{q}$

(D) $\frac{1}{q-p} \cdot \frac{p+q-q^2}{q}$

(E) $\frac{1}{q-p} \cdot \frac{p+q-p^2}{p}$

Zadanie 3

Dla dowolnej zmiennej losowej X o wartości oczekiwanej μ, wariancji $\sigma^2 < \infty$ oraz momencie centralnym μ_{2k} rzędu $2k$ zachodzą nierówności (*typu Czebyszewa*):

$$\Pr(X > \mu + t \cdot \sigma) < \frac{1}{t^{2k}} \cdot \frac{\mu_{2k}}{\sigma^{2k}}. \qquad k = 1,2,\ldots, \qquad t > 0.$$

Wiemy, że zmienna losowa X ma rozkład Gamma określony na półosi dodatniej gęstością:

$$f(x) = \frac{10^4}{3!} x^3 \exp(-10x)$$

Znajdź taką liczbę dodatnią t^*, że:

- dla $t < t^*$ ściślejsze ograniczenie na prawdopodobieństwo $\Pr(X > \mu + t \cdot \sigma)$ otrzymujemy przyjmując $k = 1$,
- zaś dla $t > t^*$ ściślejsze ograniczenie otrzymujemy przyjmując $k = 2$.

Liczba t^* wynosi:

(A) $\sqrt{3}$

(B) $\sqrt{3\frac{1}{2}}$

(C) 2

(D) $\sqrt{4\frac{1}{2}}$

(E) $\sqrt{5}$

Zadanie 4.
Każde ryzyko z pewnej populacji ryzyk generuje szkody zgodnie z procesem Poissona z parametrem intensywności λ. Zróżnicowanie wartości parametru λ w populacji dane jest gęstością:

$$f(x) = x \cdot \exp(-x)$$

Niech $T(t)$ oznacza chwilę wystąpienia pierwszej szkody po momencie *t* dla losowo wybranego z tej populacji ryzyka.
Wobec tego $E\{T(0)|T(0) > 1\}$ wynosi:

(A) 5

(B) $4\frac{1}{2}$

(C) 4

(D) $3\frac{1}{2}$

(E) 3

Zadanie 5.
Rozważamy klasyczny proces nadwyżki:
$U(t) = u + ct - S_{N(t)}$, gdzie:

- ct jest sumą składek zgromadzonych do momentu t,
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ jest sumą wartości n pierwszych szkód
- wartości szkód $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ są i.i.d, niezależne od procesu $N(t)$

Wartość pojedynczej szkody ma rozkład jednostajny na odcinku $(0, 10)$.

- zaś nadwyżka początkowa i parametr intensywności składki, oraz parametr intensywności procesu pojawiania się szkód wynoszą:
- $u = 5, \quad c = 25/4, \quad \lambda = 1.$

Prawdopodobieństwo, że do ruiny dojdzie w pierwszym z tych momentów czasu, kiedy nadwyżka spadnie poniżej wartości początkowej, wynosi:

(A) $\frac{1}{5}$

(B) $\frac{1}{25}$

(C) $\frac{5}{24}$

(D) $\frac{1}{6}$

(E) $\frac{1}{30}$

Zadanie 6.
Czas, jaki upływa od zajścia każdej szkody do jej likwidacji jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym o wartości oczekiwanej jeden rok, niezależnie od tego, kiedy do zajścia szkody doszło.

Liczba szkód zaszłych przed końcem roku 2020, i do tego momentu nie zlikwidowanych wynosi 150. Oczekiwana liczba szkód które zajdą na odcinku czasu $(2020, 2020 + t)$, gdzie $t \in (0, 1)$, wynosi:

$$E\{N(2020 + t) - N(2020)\} = 250t + 50t^2$$

Wobec tego oczekiwana liczba szkód zaszłych a nie zlikwidowanych na koniec roku 2021 wynosi:

(A) $250 + 100e^{-1}$

(B) $250 + 50e^{-1}$

(C) 250

(D) $250 - 50e^{-1}$

(E) $250 - 100e^{-1}$

Zadanie 7.
Liczba szkód w ciągu roku w pewnym ubezpieczeniu równa jest:

$$N = M_1 + \ldots + M_K \text{, gdzie:}$$

- $K, M_1, M_2, M_3, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi, zaś $M_1, M_2, M_3, \ldots$ mają identyczny rozkład prawdopodobieństwa
- K oznacza liczbę wypadków, i ma rozkład Poissona o wartości oczekiwanej λ,
- M_i jest liczbą szkód z i-tego wypadku, i ma rozkład określony na liczbach naturalnych (bez zera).

O rozkładzie liczby szkód z jednego wypadku wiemy, że:

$$\Pr(M_1 = 1) = p,\ \Pr(M_1 > 1) = 1 - p.$$

Prawdopodobieństwo warunkowe iż w danym roku doszło jedynie do jednego wypadku pod warunkiem, iż wystąpiła więcej niż jedna szkoda:

$$\Pr(K = 1 \mid N > 1)$$

przy założeniach liczbowych: $\lambda = \frac{1}{10}$, $p = \frac{4}{5}$

wynosi w przybliżeniu:

(A) 0.9

(B) 0.8

(C) 0.7

(D) 0.6

(E) 0.5

Zadanie 8.
Niech N_1 oraz N_2 oznaczają liczbę szkód wygenerowaną przez ubezpieczonego w latach 1 oraz 2, odpowiednio, zaś $N = N_1 + N_2$ niech oznacza ich sumę. Rozkład warunkowy zmiennych N_1 oraz N_2 jest postaci:
$\Pr(N_1 = m, N_2 = n | Q = q) = q^{m+n}(1-q)^{2-m-n}$,
gdzie *m* oraz *n* mogą wynieść tylko zero lub jeden.
Rozkład parametru ryzyka Q w populacji takich ubezpieczonych, określony na przedziale $(0, 1)$, jest nam nieznany. Wiemy jednak, że:
$\Pr(N = 0) = 0.74$, $\Pr(N = 1) = 0.12$, $\Pr(N = 2) = 0.14$.
Wobec tego $var(Q)$ wynosi:

(A) 0.05

(B) 0.075

(C) 0.10

(D) 0.125

(E) 0.15

Zadanie 9.
Ubezpieczeni są losowo dobrani z populacji, w której:

- łączna wartość szkód dla ubezpieczonego charakteryzującego się wartością λ parametru Λ ma złożony rozkład Poissona z oczekiwaną liczbą szkód N równą λ,
- rozkład wartości pojedynczej szkody jest taki sam dla wszystkich ubezpieczonych, a jego wartość oczekiwana wynosi μ,
- parametr Λ ma rozkład Gamma (2,4) o wartości oczekiwanej 1/2 i wariancji 1/8.

Ubezpieczyciel sprzedaje członkom tej populacji ubezpieczenie w zamian za składkę płatną z góry w wysokości:

- $120\% \cdot \mu \cdot \mathrm{E}(\Lambda | N > 0)$,

a na koniec roku tym ubezpieczonym, którzy nie zgłosili żadnej szkody, **wypłaca bonus** w wysokości:

- $120\% \cdot \mu \cdot \left\{ \mathrm{E}(\Lambda | N > 0) - \mathrm{E}(\Lambda | N = 0) \right\}$.

Bonus wynosi:

(A) $\frac{7}{18}\mu$

(B) $\frac{5}{18}\mu$

(C) $\frac{5}{20}\mu$

(D) $\frac{3}{10}\mu$

(E) $\frac{1}{3}\mu$

Zadanie 10.
Niech θ będzie dodatnią liczbą rzeczywistą.
Rozważmy parę zmiennych losowych T_θ i D, oznaczających odpowiednio:

- T_θ - moment czasu, w którym zaszła szkoda,
- D – czas, jaki upływa od momentu zajścia szkody do jej likwidacji.

Jednostką pomiaru czasu jest jeden rok.
Załóżmy, że T_θ oraz D są niezależne, przy czym:

- T_θ ma rozkład jednostajny na odcinku $(0,\theta)$
- D ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej jeden.

Sumę $(T_\theta + D)$ interpretujemy jako moment czasu, w którym zlikwidowano szkodę.

Warunkową wartość oczekiwaną $\mathrm{E}\left(D \middle| T_\theta + D > \theta\right)$ interpretujemy jako oczekiwany odstęp w czasie pomiędzy momentem zajścia a momentem likwidacji szkody, pod warunkiem iż szkoda, do której doszło na odcinku czasu $(0,\theta)$, do końca tego odcinka czasu zachowała status szkody niezlikwidowanej.

Granica:
$$\lim_{\theta\to\infty} \mathrm{E}\left(D \middle| T_\theta + D > \theta\right)$$
wynosi:

(A) 1

(B) 3/2

(C) 5/3

(D) 2

(E) 5/2

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 4 października 2021r.

Matematyka pozostałych ubezpieczeń osobowych i majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....K L U C Z   O D P O W I E D Z I..........................

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	E	
2	A	
3	D	
4	E	
5	A	
6	C	
7	B	
8	C	
9	E	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna

.