

Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXXIII Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 4 października 2021r.

Matematyka finansowa

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.

Rozważmy model chwilowej stopy procentowej, zadany następującym równaniem:

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t), \quad a, b, \sigma > 0, \quad 2ab > \sigma^2,$$

gdzie $W(t)$ jest procesem Wienera.

Niech $P(r(t); t; T)$ opisuje cenę w chwili t obligacji zerokuponowej wygasającej w momencie T i o nominale PLN 1.

Wiadomo, iż:

- $P(3\%; 0.0; 1.0) = 0.975$ oraz;
- $P(5\%; 0.5; 1.5) = 0.950$.

Proszę określić ile wynosi $P(9\%; 1.0; 2.0)$ (proszę podać najbliższą wartość):

- (A) 0.902
- (B) 0.904
- (C) 0.906
- (D) 0.908
- (E) 0.910

Zadanie 2.

Rozważmy niepłacącą dywidendy akcję \mathcal{A} , której proces ceny S_t zadany jest następującym równaniem:

$$dS_t = S_t r dt + S_t \sigma dW(t), \quad r, \sigma > 0,$$

gdzie $W(t)$ jest procesem Wienera.

Założmy, że na rynku dostępny jest instrument pochodny P na akcję \mathcal{A} , którego cena w każdej chwili czasu t zadana jest równaniem:

$$V_t = a^t \cdot (S_t)^b, \quad a > 0.$$

Proszę wyznaczyć a , wiedząc, iż rynek nie dopuszcza arbitrażu oraz $b = 0.3, r = 3\%, \sigma = 0.73$. Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 1.080
- (B) 1.085
- (C) 1.090
- (D) 1.095
- (E) 1.100

Zadanie 3.

Niech $T_0 = 0$. Rozważmy rynek Blacka-Scholesa, na którym nie ma możliwości arbitrażu. Na rynku dostępne są niepłacące dywidendy akcje \mathcal{A} o cenie $S_{T_0} = 100$ oraz europejskie opcje kupna na akcję \mathcal{A} o pięcioletnim terminie realizacji. Parametr grecki *delta* (pochodna funkcji ceny opcji po cenie instrumentu bazowego) dla tej opcji wynosi 0.368, a parametr grecki *rho* (pochodna funkcji ceny opcji po stopie wolnej od ryzyka) wynosi 89. Proszę podać cenę europejskiej opcji kupna na akcję \mathcal{A} (proszę podać najbliższą wartość):

- (A) 19.0
- (B) 19.5
- (C) 20.0
- (D) 20.5
- (E) 21.0

Zadanie 4.

W chwili 0 kredytobiorca wziął 15-letni kredyt w kwocie 500 000 PLN. Kredyt ten jest spłacany równymi ratami R_1 , na koniec każdego roku. Kredyt jest oprocentowany stałą stopą 3% w skali roku.

Na koniec roku N_1 , kiedy pozostałe (po płatności raty) do spłaty saldo zadłużenia było po raz pierwszy mniejsze niż 50% oryginalnej kwoty pożyczki, kredytobiorca zdecydował się na wzięcie drugiego, tym razem 20-letniego kredytu, w kwocie 400 000 PLN. Kredyt ten również spłacany jest równymi ratami R_2 na koniec każdego roku i jest oprocentowany stałą stopą 4% w skali roku.

Po spłacie 3 rat dla obu kredytów, kredytobiorca zdecydował, iż nie jest w stanie spłacać więcej niż $R_3 = 50\% (R_1 + R_2)$ w skali roku. Poprosił więc bank o skonsolidowanie obu kredytów i określenie minimalnego okresu N_2 trwania kredytu skonsolidowanego (w pełnych latach), dla którego spełniony jest warunek na wysokości raty R_3 . Wyliczenia nowej raty kredytu bank dokonał w oparciu o pozostałe do spłaty salda obu pożyczek, powiększone dodatkowo o 5% (koszt konsolidacji).

Skonsolidowany kredyt spłacany będzie równymi ratami na koniec roku i jest oprocentowany stałą stopą 5% w skali roku. Proszę wyznaczyć N_2 .

- (A) 22
- (B) 23
- (C) 24
- (D) 25
- (E) 26

Zadanie 5.

Niech $W(t)$ będzie standardowym procesem Wienera, a S_t procesem, dla którego zachodzi:

$$dS_t = tS_t dt + S_t dW(t).$$

Poszukujemy rozwiązania powyższego równania w postaci $S_t = \exp(W(t) + f(t))$.

Wiedząc, iż $S_0 = 3$, proszę wyznaczyć postać $f(t)$.

- (A) $f(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} + \ln 3$
- (B) $f(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \ln 3$
- (C) $f(t) = \frac{t^2}{3} + \frac{t}{2} + \ln 2$
- (D) $f(t) = \frac{t^2}{3} - \frac{t}{2} + \ln 2$
- (E) Żadna z powyższych.

Zadanie 6.

Splata kredytu 120 ratami płatnymi na koniec każdego kwartału odbywa się w następujący sposób:

- pierwsze i ostatnie 40 rat ma wartość A ,
- pozostałe raty mają wartość B .

Wiadomo, że kwartalna stopa procentowa wynosi 5.00%, a sumaryczna kwota odsetek naliczonych w pierwszych 40 ratach stanowi 80% kwoty odsetek naliczonych w kolejnych 40 ratach. Proszę określić, ile wynosi iloraz $\frac{B}{A}$ (proszę podać najbliższą wartość).

- (A) 3.4
- (B) 3.5
- (C) 3.6
- (D) 3.7
- (E) 3.8

Zadanie 7.

Funkcja intensywności oprocentowania rachunku w chwili t dla kwoty zainwestowanej w chwili s , $0 \leq s \leq t$, wynosi $\delta(s, t) = (1 + s + t)^{-1}$.

Założmy, że w chwili 0 inwestowana jest kwota startowa S . Inwestor rozważa następujące strategie inwestycyjne realizowane w horyzoncie czasu $[0,3]$:

1. zainwestowana kwota jest utrzymywana na rachunku do $t = 3$,
2. zainwestowana kwota jest utrzymywana na rachunku do $t = 2$, następnie wypłacana jest jej zakumulowana wartość, która natychmiast jest reinwestowana na tym samym rachunku (zgodnie z zadaną intensywnością oprocentowania) do $t = 3$,
3. zainwestowana kwota jest utrzymywana na rachunku do $t = 1$, następnie wypłacana jest jej zakumulowana wartość, która natychmiast jest reinwestowana na tym samym rachunku (zgodnie z zadaną intensywnością oprocentowania) do $t = 3$,
4. zainwestowana kwota jest wypłacana, a następnie reinwestowana na tym samym rachunku (zgodnie z zadaną intensywnością oprocentowania) zarówno w $t = 1$, jak i w $t = 2$.

Niech $K_{\max}(3)$ i $K_{\min}(3)$ oznaczają odpowiednio najwyższą i najniższą zakumulowaną na tym rachunku na koniec inwestycji kwotę dla wskazanych powyżej strategii. Iloraz tych kwot, tzn. $\frac{K_{\max}(3)}{K_{\min}(3)}$ wynosi (proszę podać najbliższą odpowiedź):

- (A) 1.10
- (B) 1.15
- (C) 1.20
- (D) 1.25
- (E) 1.30

Zadanie 8.

Firma ubezpieczeniowa szacuje, że będzie musiała dokonać wypłaty w wysokości 13 593 PLN w $t = 9$. W $t = 0$ zarządzający portfelem finansuje ww. zobowiązanie za pomocą 4-letnich obligacji zerokuponowych i rocznej renty dożywotniej płatnej z dołu stosując strategię immunizacji. O ile procent zarządzający portfelem będzie musiał zmienić udział rent dożywotnich w portfelu w $t = 1$, tak aby utrzymać immunizację portfela, zakładając, że roczna stopa procentowa w całym okresie trwania inwestycji wynosi 8% (proszę podać najbliższą odpowiedź)?

- (A) -1.88%
- (B) -1.98%
- (C) -2.08%
- (D) -2.18%
- (E) -2.28%

Zadanie 9.

Tabela poniżej przedstawia krzywą swap (swap curve) – roczne stopy swap dla kontraktów IRS z płatnościami odsetek co pół roku:

zapadalność (maturity) kontraktu [lata]	Stopy swap [%]
0.5	5.45
1.0	5.55
1.5	5.70

Wyznacz współczynnik dyskontowy spójny z powyższymi stopami swap dla terminu zapadalności 1,5 (proszę podać najbliższą odpowiedź):

- (A) 0.911
- (B) 0.913
- (C) 0.915
- (D) 0.917
- (E) 0.919

Zadanie 10.

Który z poniższych wzorów odpowiada duracji Macaulaya dla renty płatnej z góry o płatnościach $\frac{1}{m}$ dokonywanych m razy w roku przez n lat, rozpoczynającą się w $t = k$, gdzie i oznacza efektywną stopę procentową dla okresu o długości $\frac{1}{m}$.

(A) $k + \frac{1}{ni} - \frac{m}{(1+i)^{mn}-1}$

(B) $k + \frac{1}{mi} - \frac{m}{(1+i)^{mn}-1}$

(C) $k + \frac{1}{ni} - \frac{n}{(1+i)^{mn}-1}$

(D) $k + \frac{1}{mi} - \frac{n}{(1+i)^{mn}-1}$

(E) Żadna z powyższych.

Dystrybuanta rozkładu normalnego $N(0,1)$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 4 października 2021r.

Matematyka finansowa

Arkuszu odpowiedzi*

Imię i nazwisko :

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	A	
2	A	
3	A	
4	D	
5	B	
6	D	
7	D	
8	E	
9	E	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.