

Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXXI Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 18 listopada 2019r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.

Losujemy niezależnie dwie liczby X_1, X_2 z rozkładu o gęstości:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{dla } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Dzielimy odcinek $[0, 1]$ na 3 części: $[0, \min(X_1, X_2))$, $[\min(X_1, X_2), \max(X_1, X_2))$, $(\max(X_1, X_2), 1]$.
Jakie jest prawdopodobieństwo, że z tych trzech części można ułożyć trójkąt?

- (A) $\frac{1}{4}$
- (B) $\frac{1}{5}$
- (C) $\frac{11}{48}$
- (D) $\frac{5}{24}$
- (E) $\frac{1}{3}$

Zadanie 2.

Niech X_1, X_2, X_3 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $P(X_i = k) = (1 - p_i)p_i^{k-1}$ dla $k = 1, 2, \dots$, gdzie $p_i = 2^{i-4}$. Zdefiniujmy zmienną losową

$$Y = \mathbb{1}(X_1 \leq X_2 \leq X_3) := \begin{cases} 1 & \text{jeśli } X_1 \leq X_2 \leq X_3, \\ 0 & \text{w p. p.} \end{cases}$$

Ile wynosi EY ?

(A) $\frac{32}{45}$

(B) $\frac{16}{21}$

(C) $\frac{1}{8}$

(D) $\frac{32}{63}$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 3.

Założmy, że losujemy jednostajnie, niezależnie, ze zwracaniem $n \geq 7$ liter ze zbioru $\{A, C, G, T\}$, oznaczmy przez X_i wynik i -tego losowania. Innymi słowy mamy n niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $P(X_i = A) = P(X_i = C) = P(X_i = G) = P(X_i = T) = 1/4, i = 1, \dots, n$. Niech Y_n będzie zmienną losową oznaczającą liczbę wystąpień wzorca $(A, ?, A)$ (gdzie '?' oznacza dowolną z liter A, C, G, T) w ciągu (X_1, \dots, X_n) .

Uwaga: np. dla $n = 7$ w ciągu (A, C, A, T, A, T, G) wzorec $(A, ?, A)$ występuje $Y_7 = 2$ razy (wystąpienia się nakładają, pierwszy wzorec $(X_1, X_2, X_3) = (A, C, A)$, drugi wzorec $(X_3, X_4, X_5) = (A, T, A)$).

Ile wynosi EY_n ?

(A) $\frac{n-2}{16}$

(B) $\frac{n}{32}$

(C) $\frac{3n-1}{32}$

(D) $\frac{3n+1}{32}$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 4.

Założmy, że X_1, X_2, X_3, X_4 są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie $P(X_i = 1) = p = 1 - P(X_i = 0), i = 1, \dots, 4$, gdzie $p \in (0, 1)$. Testujemy hipotezę

$$H_0 : p = \frac{1}{2} \quad \text{vs.} \quad H_1 : p = \frac{1}{4}$$

na poziomie istotności $\alpha = \frac{11}{16}$. Oznaczmy $S = \sum_{i=1}^4 X_i$. Jednostajnie najmocniejszy test odrzuca hipotezę H_0 , gdy

- (A) $S < 2$
- (B) $S \leq 2$
- (C) $S > 2$
- (D) $S > 1$
- (E) $S < 3$

Zadanie 5.

Mamy dane dwa rozkłady prawdopodobieństwa $\{p_i\}, \{q_i\}, i = 1, \dots, 10$:

$i :$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p_i :$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.2	0.0	0.0	0.0	0.3	0.1
$q_i :$	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1	0.0	0.0	0.0	0.1

Oznaczmy $E := \{1, \dots, 10\}$. Rozpatrzmy zbiór dwuwymiarowych rozkładów, takich, że rozkładami brzegowymi są $\{p_i\}, \{q_i\}, i \in E$,

$$\mathcal{W} := \{w : \text{rozkład na } E^2 \text{ taki, że } \forall(i \in E) \sum_{j=1}^{10} w(i, j) = p_i \text{ oraz } \forall(j \in E) \sum_{i=1}^{10} w(i, j) = q_j\}.$$

$(X, Y) \sim w$ oznacza, iż wektor (X, Y) ma rozkład w , tzn. $P(X = i, Y = j) = w(i, j)$.

Ile wynosi

$$\inf_{\substack{(X, Y) \sim w \\ w \in \mathcal{W}}} P(X \neq Y)?$$

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{1}{10}$

(C) $\frac{9}{10}$

(D) $\frac{2}{5}$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 6.

Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem 2, a Y zmienną losową Poissona z parametrem 8, niezależną od X .

(Zmienna losowa Z jest zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem $\lambda > 0$ jeśli $P(Z = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k = 0, 1, \dots$).

Niech T oznacza rozkład zmiennej losowej X pod warunkiem $X + Y = 100$, tzn.

$$P(T = k) = P(X = k | X + Y = 100), \quad k = 0, 1, \dots, 100$$

Ile wynosi $VarT$?

- (A) 14
- (B) 16
- (C) 18
- (D) 32
- (E) Żadne z powyższych

Zadanie 7.

Niech $X_1, \dots, X_n, n \geq 1$ oznaczają wyniki kolejnych niezależnych rzutów kostką, tzn. są to niezależne zmienne losowe o rozkładzie $P(X_i = k) = \frac{1}{6}, k = 1, \dots, 6$.

Niech Y_n oznacza liczbę różnych wyników wśród X_1, X_2, \dots, X_n (np. gdy $X_1 = X_2 = X_3 = 4$, to $Y_3 = 1$, natomiast, gdy $X_1 = X_2 = 3, X_3 = 6, X_4 = 5, X_5 = 3$, to $Y_4 = 3$). Przyjmujemy $Y_0 = 0$.

Ile średnio trzeba wykonać rzutów, by każdy z wyników się pojawił? Innymi słowy, ile wynosi ET , gdzie

$$T = \min\{n \geq 0 : Y_n = 6\}?$$

- (A) 11.9
- (B) 15.0
- (C) 13.8
- (D) 14.7
- (E) Żadne z powyższych

Zadanie 8.

Niech $X_1, X_2, \dots, X_n, n \geq 7$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Erlanga z parametrem kształtu $k > 0$ (liczba całkowita) oraz częstością $\lambda > 0$ (liczba rzeczywista), tj. o gęstości

$$f(x) = \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!}, \quad \text{dla } x \geq 0.$$

Oznaczmy $\hat{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Ustalmy $s \in \{1, \dots, n\}$. Ile wynosi $\text{Cov}(\hat{X}, X_s - \hat{X})$?

(A) $\frac{2k(\lambda + kn)}{n^2 \lambda}$

(B) $\frac{2k(\lambda + kn)}{n \lambda^2}$

(C) $\frac{k(\lambda + kn)}{n^2 \lambda^2}$

(D) $\frac{k(\lambda + kn)}{n \lambda^2}$

(E) 0

Zadanie 9.

Załóżmy, że X_1, X_2, X_3, X_4 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem 3, tzn. o gęstości

$$f_X(x) = \begin{cases} 3e^{-3x} & \text{jeśli } x \geq 0, \\ 0 & \text{w p. p.} \end{cases}$$

Oznaczmy $S = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 X_i$. Ile wynosi $P(X_1 > S)$?

- (A) $\frac{37}{64}$
- (B) $\frac{11}{16}$
- (C) $\frac{27}{64}$
- (D) $\frac{11}{32}$
- (E) Żadne z powyższych

Zadanie 10.

Zmienna losowa X ma rozkład standardowy normalny $N(0, 1)$, tj. ma gęstość:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), x \in \mathbb{R}. \text{ Ustalmy } r > 0 \text{ i zdefiniujmy}$$

$$Y := \begin{cases} X & \text{jeśli } |X| < r, \\ -X & \text{jeśli } |X| \geq r. \end{cases}$$

Kowariancja $\text{Cov}(X, Y)$ wynosi 0 dla parametru r spełniającego równość:

(A) $\int_r^\infty x^2 \phi(x) = \frac{1}{4}$

(B) $\int_r^\infty x^2 \phi(x) = \frac{1}{2}$

(C) $\int_r^\infty x^2 \phi(x) = \frac{1}{11}$

(D) $\int_r^\infty x^2 \phi(x) = \frac{1}{16}$

(E) Żadne z powyższych

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 18 listopada 2019r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko :

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	C	
2	B	
3	A	
4	E	
5	D	
6	B	
7	D	
8	E	
9	C	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.