Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXXI Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 18 listopada 2019r.

Matematyka pozostałych ubezpieczeń osobowych i majątkowych

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: ....

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.
O rozkładzie zmiennej X wiadomo, iż:

- $\Pr(X = 0) = 0.7$
- $\Pr(X > 0) = 0.3$
- $\mathrm{E}(X \mid X > 0) = 90$

Zbiór możliwych wartości $\mathrm{E}\left[(X - 20)_+\right]$ jest przedziałem:

(A) [24; 27)

(B) [7; 27)

(C) [7; 24)

(D) [21; 24)

(E) [21; 27)

Zadanie 2.
Każde z ryzyk pochodzących z pewnej populacji charakteryzuje się tym, że przy danej wartości λ parametru ryzyka Λ rozkład wartości szkód z tego ryzyka jest złożonym rozkładem Poissona:

- z liczbą szkód N o wartości oczekiwanej λ
- oraz rozkładem wartości pojedynczej szkody Y takim, że:
  $\mathrm{E}(Y|\Lambda = \lambda) = a + b\lambda$, gdzie $a \geq 0$ oraz $b > 0$.

Załóżmy, że rozkład parametru ryzyka Λ w tej populacji jest rozkładem Gamma o gęstości danej na półosi dodatniej wzorem:

- $f_\Lambda(\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha-1}\exp(-\beta\lambda), \quad \alpha, \beta > 0.$

Niech N oznacza liczbę szkód, zaś $Y_1 + Y_2 + \ldots Y_N$ łączną wartość szkód z ryzyka losowo wybranego z tej populacji. Iloraz:

- $\dfrac{\mathrm{E}(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_N)}{E(N)}$,

możemy interpretować jako granicę stochastyczną średniej wartości szkody ze szkód wygenerowanych przez grupę ryzyk wylosowanych z tej populacji, o ile liczebność tej grupy nieograniczenie rośnie. Wartość tego ilorazu wynosi:

(A) $a + b\frac{\propto}{\beta+1}$

(B) $a + b\frac{\propto+1}{\beta+1}$

(C) $a + b\frac{\propto+1}{\beta}$

(D) $a + b\frac{\propto}{\beta}$

(E) $a + b\frac{\propto(\propto+1)}{\beta^2}$

Zadanie 3.

W pewnym ubezpieczeniu liczby szkód $N_1, N_2, N_3,...$ które w kolejnych latach generuje ubezpieczony, którego charateryzuje wartość q parametru ryzyka Q, są niezależnymi zmiennymi losowymi o identycznym rozkładzie dwumianowym z prawdopodobieństwem zajścia szkody w pojedynczym roku równym q.

Rozkład wartości parametru ryzyka Q w populacji ubezpieczonych dany jest na przedziale $(0,1)$ gęstością:

- $f_Q(q) = \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} q^{\alpha-1}(1-q)^{\beta-1}$,

z pewnymi nieznanymi dodatnimi parametrami (α, β).

Wiemy, że:

- prawdopodobieństwo p_0 iż losowo wybrany ubezpieczony w ciągu jednego roku nie będzie miał szkody wynosi $\dfrac{9}{14}$
- prawdopodobieństwo $p_{0,0}$ iż losowo wybrany ubezpieczony w ciągu dwóch kolejnych lat nie będzie miał szkody wynosi $\dfrac{3}{7}$.

Wobec tego wartości parametrów (α, β) wynoszą:

(A) $(\alpha, \beta) = \left(\dfrac{5}{3}, 3\right)$

(B) $(\alpha, \beta) = \left(\dfrac{10}{3}, 6\right)$

(C) $(\alpha, \beta) = (5, 9)$

(D) $(\alpha, \beta) = \left(\dfrac{20}{3}, 12\right)$

(E) $(\alpha, \beta) = \left(\dfrac{25}{3}, 15\right)$

Zadanie 4.
Rozważa się niekiedy następującą formułę składki $\Pi(X)$ za ryzyko X:

- $\Pi(X) = E(X) + E\{[X - E(X)]_+\}$,

a więc gdzie narzut na składkę netto ma postać wartości oczekiwanej nadwyżki zmiennej X ponad swoją wartość oczekiwaną.
Rozważmy wskaźnik względnego narzutu bezpieczeństwa w składce:

- $\theta(X) := \dfrac{\Pi(X) - E(X)}{E(X)}$

dla tej formuły.
Rozważmy też rodzinę rozkładów Pareto z dystrybuantach postaci:

- $F_X(x) = 1 - \left(\dfrac{v}{v+x}\right)^{\alpha}$,

gdzie parametry dystrybuant mogą przyjmować dowolne wartości spełniające warunki:

- $v > 0$ oraz $\alpha > 1$

Kres dolny zbioru wartości wskaźnika $\theta(X)$ dla ryzyk X z tej rodziny wynosi:

(A) 0

(B) 1

(C) $1 - e^{-1}$

(D) $e^{-1/2}$

(E) e^{-1}

Zadanie 5.

Niech $S_n = N_1 + N_2 + \ldots + N_n$ oznacza sumę *n* niezależnych zmiennych losowych o identycznym rozkładzie ujemnym dwumianowym:

- $\Pr(N_1 = k) = \binom{r+k-1}{k}(1-q)^r q^k, \quad k = 0,1,2,\ldots$

o znanej wartości parametru $r > 1$ oraz nieznanej wartości parametru $q \in (0, 1)$.
Wiadomo, że estymator największej wiarogodności parametru *q* jest postaci:

- $q_{MNW} = \frac{S_n}{r \cdot n + S_n}$

Który z poniższych estymatorów (sam estymator MNW, czy też jedna z jego czterech modyfikacji) jest estymatorem nieobciążonym?
(Uwaga: zakładamy, że $r > 1$)

(A) $\frac{S_n}{r \cdot n + S_n}$

(B) $\frac{S_n}{r \cdot n + S_n - 1}$

(C) $\frac{S_n + 1}{r \cdot n + S_n}$

(D) $\frac{S_n}{r \cdot n + S_n - n}$

(E) $\frac{S_n + n}{r \cdot n + S_n}$

Zadanie 6.

Proces nadwyżki ubezpieczyciela jest złożonym procesem Poissona z zerową nadwyżką początkową, z dodatnią wartością oczekiwaną przyrostów procesu, oraz z rozkładem wartości pojedynczej szkody danym gęstością:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \\ 0 & \textit{poza tym} \end{cases}$$

Warunkowa wartość oczekiwana deficytu w momencie ruiny (pod warunkiem że do ruiny dojdzie) wynosi:

(A) 3/8

(B) 1/3

(C) 5/12

(D) 7/16

(E) 4/9

Zadanie 7.

Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki $U(t) = u + ct - S_{N(t)}$, gdzie:

- u jest nadwyżką początkową,
- ct jest sumą składek zgromadzonych do momentu t,
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ jest sumą wypłat z tytułu n pierwszych wypadków
- wypłata X_i jest równa łącznej kwocie szkód z jednego wypadku:
  $X_i = Y_i(1) + \ldots + Y_i(M_i)$
- kwoty szkód $Y_1(1), Y_1(2), Y_1(3), \ldots, Y_2(1), Y_2(2), Y_2(3), \ldots, Y_3(1), Y_3(2), Y_3(3), \ldots$ oraz liczby szkód przypadających na poszczególne wypadki $M_1, M_2, M_3, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi.

Jeśli przyjmiemy następujące założenia:

- zmienne $Y_1(1), Y_1(2), Y_1(3), \ldots, Y_2(1), Y_2(2), Y_2(3), \ldots, Y_3(1), Y_3(2), Y_3(3), \ldots$ mają ten sam rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej jeden
- zmienne $M_1, M_2, M_3, \ldots$ mają ten sam rozkład przesunięty geometryczny:
  $$\Pr(M_i = k) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^k \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots$$
- parametr składki wynosi $c = \lambda \cdot \mathrm{E}(X_1) \cdot 120\%$

wtedy współczynnik dopasowania (*adjustment coefficient*) R wyniesie:

(A) 1/6

(B) 1/9

(C) 1/12

(D) 1/15

(E) 1/18

Zadanie 8.
Niech (T, D) oznaczają czas kalendarzowy zajścia szkody oraz czas likwidacji szkody (okres czasu, jaki upływa od zajścia szkody do jej likwidacji).

Przyjmijmy że:

- intensywność procesu pojawiania się szkód rosła od niepamiętnych czasów do momentu $t = 0$ wykładniczo (z wykładnikiem $\delta > 0$), co oznacza że czas zajścia losowo wybranej szkody zaszłej przed czasem $t = 0$ ma rozkład o gęstości:
  $$f_T(t) = \begin{cases} \delta \exp(\delta t) & gdy \quad t < 0 \\ 0 & w\ p.p. \end{cases},$$
- rozkład czasu likwidacji szkody dany jest gęstością:
  $$f_D(t) = \begin{cases} \beta \exp(-\beta t) & gdy \quad t > 0 \\ 0 & w\ p.p. \end{cases}$$
- (T, D) są niezależnymi zmiennymi losowymi.

Oczekiwana wartość czasu likwidacji dla tych szkód, które w momencie czasu $t = 0$ mają status szkód zaszłych, ale jeszcze nie zlikwidowanych, a więc:

- $E\left(D \middle| T + D > 0\right)$,

Wynosi:

(A) $\frac{1}{\beta}$

(B) $\frac{2}{\beta}$

(C) $\frac{1}{\beta}\left(1 + \frac{\beta\delta}{(\beta+\delta)^2}\right)$

(D) $\frac{1}{\beta}\left(1 + \frac{\beta}{\beta+\delta}\right)$

(E) $\frac{1}{\beta}\left(1 + \frac{\delta}{\beta+\delta}\right)$

Zadanie 9.
W pewnym portfelu ubezpieczeń występuje tendencja do dłuższego czasu likwidacji dużych szkód niż szkód małych. Oto prosty model tego zjawiska:

Y, D to wartość i czas opóźnienia likwidacji losowo wybranej szkody, przy czym rozkład bezwarunkowy zmiennej D określamy następująco:

- $D = 0$ jeśli szkodę likwiduje się w tym samym kwartale, kiedy do niej doszło,
- $D = 1$ jeśli szkodę likwiduje się w następnym kwartale,
- $D = 2$ jeśli szkodę likwiduje się jeszcze o kwartał później, itd.,

a zależność wartości szkody i opóźnienia wyraża założenie, że:

- $\mathrm{E}(Y|\mathrm{D} = \mathrm{k}) = \mu(1 + w)^k$

Rozkład czasu likwidacji szkody w ujęciu ilościowym dany jest więc ciągiem:

- $r_k \coloneqq \Pr(D = k)$

zaś rozkład czasu likwidacji szkody w ujęciu wartościowym dany jest ciągiem:

- $R_k \coloneqq r_k \frac{\mathrm{E}(Y|D = k)}{\mathrm{E}(Y)}$

Załóżmy, że zachodzi:

- $r_k = (k + 1)\left(\frac{4}{10}\right)^2 \left(\frac{6}{10}\right)^k, \quad k = 0,1,2, \ldots$
- oraz: $w = \frac{1}{9}$.

Wobec tego $\frac{R_2}{r_2}$ wynosi (w przybliżeniu):

(A) 0.928

(B) 0.904

(C) 0.881

(D) 0.857

(E) 0.834

Zadanie 10.
Dla dowolnej zmiennej losowej X o wartości oczekiwanej μ, wariancji $\sigma^2 > 0$ oraz momencie centralnym μ_{2k} rzędu $2k$ zachodzą nierówności (typu Czebyszewa):
$\Pr(X > \mu + t\sigma^2) < \frac{\mu_{2k}}{t^{2k}\sigma^{2k}}$, $k = 1,2,3,\ldots,$ $t > 0$

Jeśli $\mu_4 < \infty$, wtedy istnieje taka liczba t^*, że:

- dla $t < t^*$ ściślejsze ograniczenie na prawdopodobieństwo $\Pr(X > \mu + t\sigma^2)$ otrzymujemy przyjmując $k = 1$,
- zaś dla $t > t^*$ ściślejsze ograniczenie otrzymujemy przyjmując $k = 2$.

Wiemy, że zmienna losowa X jest sumą dwóch niezależnych zmiennych losowych o identycznych rozkładach:

- z zerową wartością oczekiwaną, wariancją równą 4, oraz momentem centralnym czwartego rzędu równym $6 \cdot 4^2$.

Liczba t^* dla zmiennej losowej X wynosi:

(A) $3/\sqrt{2}$

(B) 3/2

(C) $2/\sqrt{3}$

(D) $3\sqrt{2}$

(E) $2\sqrt{3}$

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 18 listopada 2019r.

Matematyka pozostałych ubezpieczeń osobowych i majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : ....K L U C Z   O D P O W I E D Z I.............................

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	E	
2	C	
3	C	
4	E	
5	B	
6	A	
7	B	
8	D	
9	D	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.