Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXXI Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 18 listopada 2019r.

Matematyka finansowa

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: ....

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.

Rozważmy portfel składający się z dwóch aktywów, S_1 oraz S_2, których zmianę wartości w ciągu roku w zależności od zrealizowanego scenariusza przedstawia poniższa tabela:

Scenariusz	Prawdopodobieństwo zajścia scenariusza	Zmiana wartości aktywa S_1	Zmiana wartości aktywa S_2
ω_1	0,4	-10%	20%
ω_2	0,3	0%	10%
ω_3	0,3	20%	10%

Stosunek udziału aktywa S_1 do udziału aktywa S_2 w portfelu o minimalnej wariancji wynosi w przybliżeniu:

(A) –0.22

(B) 0

(C) 0.17

(D) 0.35

(E) 2.83

Zadanie 2.

Spółki A i B mają możliwość zaciągnięcia 5-letniego kredytu w wysokości 1 miliona złotych o następujących rocznych stopach oprocentowania:

Spółka	Oprocentowanie stałe	Oprocentowanie zmienne
A	7.3%	$WIBOR + 0.5\%$
B	6%	$WIBOR - 0.1\%$

Jeżeli spółka A zaciągnie kredyt o oprocentowaniu, dla którego ma przewagę komparatywną względem spółki B, a spółka B zaciągnie kredyt o oprocentowaniu, dla którego ma przewagę komparatywną względem spółki A, a następnie obie spółki dokonają transakcji swap na stopę procentową, jednakowo atrakcyjnej dla każdej ze spółek, z udziałem instytucji pośredniczącej, która zrealizuje zysk o wartości 3000 złotych rocznie, wówczas oprocentowanie nogi stałej swap'u wyniesie:

(A) 5.9%

(B) 6.0%

(C) 6.5%

(D) 7.1%

(E) 7.2%

Zadanie 3.

Na początku roku (w chwili $t = 0$) portfel pewnego funduszu inwestycyjnego składa się z obligacji, o których wiadomo, że:

- obligacje płacą raz w roku kupony w wysokości 4% wartości nominalnej;
- cena jednej obligacji wyznaczona przy stopie procentowej 6% wynosi 80.6% jej wartości nominalnej;
- duracja jednej obligacji wyznaczona przy stopie procentowej 6% wynosi 11.11.

Na początku następnego roku (w chwili $t = 1$) kwoty otrzymane z kuponów zostały zainwestowane w dwuletnie obligacje zerokuponowe. Duracja portfela funduszu inwestycyjnego w chwili $t = 1$ przy stopie procentowej 6% wynosi w przybliżeniu:

(A) 9.11

(B) 9.63

(C) 10.21

(D) 10.67

(E) 11.11

Zadanie 4.

Rozważmy model Vašiček'a dla stopy procentowej, zadany następującym równaniem:

$$dr(t) = \big(b - ar(t)\big)dt + \sigma dW(t), \qquad a > 0, \qquad r(0) = 0$$

gdzie $W(t)$ jest standardowym procesem Wienera.

Załóżmy, że $a = 0.5,\ b = 0.2,\ \sigma = 0.04$. Proszę określić 95% przedział ufności dla $r(1)$. Proszę podać najbliższą odpowiedź.

(A) $(0.045\,, 0.270)$

(B) $(0.070\,, 0.245)$

(C) $(0.095\,, 0.220)$

(D) $(0.120\,, 0.195)$

(E) $(0.145\,, 0.170)$

Zadanie 5.

Bank proponuje klientom lokatę na okres 1 roku kalendarzowego. Lokata ta gwarantuje klientowi, że po roku otrzyma wypłatę zadaną następującym wzorem:

$$K(1) = L\, max\left(\frac{IDX(1)}{IDX(0)}, 1 + r\right), gdzie$$

L oznacza zainwestowaną w chwili 0 kwotę, a $IDX(t)$ opisuje wartość referencyjnego indeksu w chwili t.

Wiadomo, że indeks wzrasta w ciągu każdych 3 miesięcy o 10% z prawdopodobieństwem 50% lub maleje o 8% z prawdopodobieństwem 50%. Ile wynosi (w momencie zawarcia lokaty) wartość oczekiwana udzielanej przez bank gwarancji wypłaty kwoty $K(1)$ w momencie wygaśnięcia lokaty, wyrażona jako procent zainwestowanej kwoty L, tj. wartość

$$\frac{E\{K(1) - (1 + r)L\}}{(1 + r)\, L},$$

przy założeniu, że stopa wolna od ryzyka w okresie trwania inwestycji wynosi $r = 4{,}06\%$. Proszę podać najbliższą wartość.

(A) 4 %

(B) 5 %

(C) 6 %

(D) 7 %

(E) 8 %

Zadanie 6.

Rozważmy następujący model wyceny obligacji, w którym:

- dostępne są cztery obligacje zerokuponowe o nominale 1, które wygasają w chwilach 1, 2, 3 i 4, odpowiednio;
- ceny tych obligacji w chwili 0 wynoszą odpowiednio: $\mathrm{P}(0,1) = 0.930$, $\mathrm{P}(0,2) = 0.870$, $\mathrm{P}(0,3) = 0.820$, $\mathrm{P}(0,4) = 0.780$ (gdzie $P(t,T)$ oznacza cenę w chwili t obligacji wygasającej w momencie T).

Wiadomo, że w chwili 1 wystąpi jeden z 3 możliwych stanów rynku: $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Ceny obligacji w chwili 1, w każdym ze stanów dane są w tabeli:

	ω_1	ω_2	ω_3
$\mathrm{P}(1,2)$	0.970	0.900	0.870
$\mathrm{P}(1,3)$	0.930	0.830	0.800
$\mathrm{P}(1,4)$	0.870	X	0.710

Żadne transakcje nie są możliwe pomiędzy chwilami 0 i 1. Wartość X, przy której model ten jest wolny od arbitrażu, wynosi (proszę podać najbliższą wartość):

(A) 0.791

(B) 0.801

(C) 0.811

(D) 0.821

(E) 0.831

Zadanie 7.

Rozważmy niepłacącą dywidendy akcję $\mathcal{A}$, której proces ceny S_t zadany jest następującym równaniem:

$$dS_t = S_t r dt + S_t \sigma dW(t), \qquad r, \sigma > 0,$$

gdzie $W(t)$ jest standardowym procesem Wienera.

Załóżmy, że na rynku dostępne są dwa instrumenty pochodne na akcję $\mathcal{A}$. Oba wygasają w tym samym momencie T. Przyjmijmy, że ich wartości w chwili t zadane są funkcjami $P_1(S_t, t)$ oraz $P_2(S_t, t)$.

Inwestor w chwili t posiada następujące informacje:

	Instrument P_1	Instrument P_2
Parametr grecki Delta	0.3	-0.3
Parametr grecki Theta	-1.24	-0.7
Cena	0.4	$P_2(S_t, t)$

Proszę określić wartość $P_2(S_t, t)$, wiedząc, iż $r = 3\%$, $\sigma = 20\%$ oraz zachodzi:

$$S_t^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 P_1(S_t, t)}{\partial S_t^2} + \frac{\partial^2 P_2(S_t, t)}{\partial S_t^2} \right) = 100.$$

(A) 1.2

(B) 1.4

(C) 1.6

(D) 1.8

(E) 2.0

Zadanie 8.

Kredyt w wysokości 600 000 PLN ma być spłacany przez okres 30 lat w następujący sposób:

- przez pierwsze 10 lat na końcu każdego roku spłacane będzie jedynie 35% kwoty odsetek od oryginalnego (nominalnego) zadłużenia,
- przez następne 5 lat na końcu każdego roku spłacane będą jedynie odsetki od kwoty bieżącego zadłużenia,
- przez kolejne 5 lat na końcu każdego roku spłacany będzie jedynie kapitał przy użyciu równych rat, przy czym łącznie w tym okresie zapłacone zostanie 20% nominalnej kwoty zadłużenia,
- przez ostatnie 10 lat na końcu każdego roku kredyt spłacany będzie przy użyciu równych rat w wysokości R.

Proszę wyznaczyć wartość R, jeśli wiadomo, że w pierwszych 10 latach stopa procentowa wyniesie 2.00%, w następnych 5 latach 3.00%, w kolejnych 5 latach 3.50%, a podczas ostatnich 10 lat 3.75%. Proszę podać najbliższą wartość.

(A) 83 449 PLN

(B) 82 449 PLN

(C) 81 449 PLN

(D) 80 449 PLN

(E) 79 449 PLN

Zadanie 9.

Załóżmy, że trzy osoby biorą z banku kredyt w kwocie 200 000 PLN każdy. Kredyty są spłacana za pomocą rat płatnych na koniec każdego roku przez 15 lat. Każda z osób ma inny plan spłaty kredytu;

- osoba pierwsza spłaca kredyt za pomocą rat postaci: P, $P - 700$, $P - 1\,400$,..., $P - 9\,800$ (każda rata jest o 700 mniejsza od poprzedniej);
- osoba druga spłaca kredyt za pomocą rat postaci: Q, $2Q$, $3Q$,..., $15Q$;
- osoba trzecia spłaca kredyt za pomocą rat postaci: R, $(1{,}05)^1R$, $(1{,}05)^2R$, ..., $(1{,}05)^{14}R$.

Roczna efektywna stopa procentowa wynosi i = 3%. Ile wynoszą sumaryczne odsetki zapłacone przez wszystkich trzech kredytobiorców w całym okresie spłacania kredytów (proszę podać najbliższą wartość)?

(A) 170 500 PLN

(B) 173 500 PLN

(C) 176 500 PLN

(D) 179 500 PLN

(E) 182 500 PLN

Zadanie 10.

Inwestor zakupił 10 letnią obligację o nominale 100 PLN, kuponie 6% w skali roku płaconym na koniec każdego półrocza. Obligacja ma wbudowaną opcję przedłużenia (*extendable bond*) o kilku możliwych terminach wykupu w okresie przedłużenia, który wynosi 6 lat. Oznacza to, że w chwili pierwotnego momentu wygaśnięcia (10 lat) emitent może zdecydować o przedłużeniu czasu trwania obligacji, przy utrzymaniu początkowych założeń odnośnie wypłacanego kuponu. Ponadto ma on prawo wyboru momentu zapadalności (wykupu) obligacji w okresie przedłużenia. Możliwe zapadalności mogą przypadać w momentach wypłaty kuponu, przy czym nie jest możliwy wykup obligacji przed upływem pierwotnego 10-letniego okresu trwania jak również przed upływem tego okresu nie jest znana decyzja emitenta o przedłużeniu i wyborze momentu zapadalności. Wartość wykupu zależy od roku obligacji, w którym nastąpi wykup (przy czym pierwszy rok rozpoczyna się w momencie emisji $t = 0$ i każdy n- ty rok obligacji rozpoczyna się po wypłacie kuponu należnego za
(n-*1*)-wszy rok):

Rok obligacji	10	11	12	13	14	15	16
Wartość wykupu (PLN)	100.0	116.0	116.0	108.0	108.0	148.0	148.0

Jaką największą cenę może zapłacić inwestor w momencie zakupu ($t = 0$), jeśli chce on osiągnąć stopę dochodowości obligacji co najmniej 8% w skali roku (przy dyskretnej kapitalizacji zgodnej z częstotliwością wypłaty kuponu, tj. 4% w skali półrocza)? Proszę podać najbliższą odpowiedź.

(A) 86.0

(B) 87.0

(C) 88.0

(D) 89.0

(E) 90.0

Dystrybuanta rozkładu normalnego N(0,1)

Z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 18 listopada 2019r.

Matematyka finansowa

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	D	
2	D	
3	C	
4	C	
5	D	
6	D	
7	C	
8	A	
9	B	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.