Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXIX Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 26 listopada 2018r.

Matematyka pozostałych ubezpieczeń osobowych i majątkowych

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: ....

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.
Pewien podmiot kieruje się w decyzjach maksymalizacją wartości oczekiwanej funkcji użyteczności o postaci:
$u(x) = \ln(x)$.
Tymczasem majątek tego podmiotu wynosi w. Połowa tego majątku narażona jest jednak na ryzyko całkowitej utraty, co może nastąpić z prawdopodobieństwem q. Od tego ryzyka można się na rynku ubezpieczyć. Rynek oferuje kontrakty z udziałem własnym ubezpieczonego, wyceniane według wartości oczekiwanego odszkodowania pomnożonej przez czynnik $(1+\theta)$. Przy założeniu, iż:
$w = 2, \quad q = 1/5, \quad \theta = 1/4,$
podmiot ten wybierze kontrakt z udziałem własnym w wysokości:

(A) 0

(B) $\frac{23}{30}$

(C) $\frac{10}{15}$

(D) $\frac{7}{15}$

(E) 1 (tzn. nie ubezpieczy się wcale)

Zadanie 2.
Proces nadwyżki ubezpieczyciela ma postać:
$U(t) = u + c \cdot t - S(t)$
gdzie:
- u - wartość początkowa nadwyżki,
- $S(t)$ - to złożony proces Poissona z parametrem częstotliwości λ, wyrażający zagregowaną wartość szkód do momentu t,
- składka c równa jest oczekiwanej wartości szkód za okres jednostkowy pomnożonej przez czynnik $(1+\theta)$,

oraz gdzie wartość pojedynczej szkody ma rozkład wykładniczy.

Wiemy, że $\theta = 1/5$, oraz że prawdopodobieństwo ruiny, a więc:
$\Psi(u) = \Pr\left(U(t) < 0 \quad dla\ pewnego \quad t > 0\right)$
równe jest 1/10.
Udziałowcy zwiększyli nadwyżkę początkową dwukrotnie - do wysokości $2u$.
Jeśli pozostałe parametry procesu nie uległy zmianie, prawdopodobieństwo ruiny wyniesie teraz:

(A) 0.010

(B) 0.012

(C) 0.0144

(D) $\frac{1}{144}$

(E) za mało danych do udzielenia odpowiedzi liczbowej

Zadanie 3.
Proces nadwyżki ubezpieczyciela ma tę samą postać co w poprzednim zadaniu:
$U(t) = u + c \cdot t - S(t)$
gdzie:
- u - wartość początkowa nadwyżki,
- $S(t)$ - to złożony proces Poissona z parametrem częstotliwości λ, wyrażający zagregowaną wartość szkód do momentu t,
- składka c równa jest oczekiwanej wartości szkód za okres jednostkowy pomnożonej przez czynnik $5/4$.

Tym razem rozkład wartości pojedynczej szkody Y jest inny, a mianowicie taki, że $\ln(Y)$ ma rozkład normalny o parametrach $(\mu, \sigma^2) = (1, 2)$.
Niech $L \coloneqq \sup_{t>0}(U(0) - U(t))$ oznacza maksymalną możliwą stratę.
Jej wartość oczekiwana wynosi:

(A) e^3

(B) e^4

(C) e^5

(D) $2e^3$

(E) $2e^4$

Zadanie 4.
W kolejnych latach ubezpieczony charakteryzujący się wartością λ parametru ryzyka Λ generuje szkody w liczbie N_t :

$$\Pr\left(N_t = k_t \middle| \Lambda = \lambda\right) = \frac{\lambda^{k_t}}{k_t!} \cdot e^{-\lambda}, \quad t = 1, 2 ;$$

przy czym:

$$\Pr\left(N_1 = k_1 \wedge N_2 = k_2 \middle| \Lambda = \lambda\right) = \Pr\left(N_1 = k_1 \middle| \Lambda = \lambda\right) \cdot \Pr\left(N_2 = k_2 \middle| \Lambda = \lambda\right).$$

Efekt losowania ubezpieczonego z populacji potencjalnych ubezpieczonych opisuje rozkład:

$$f_\Lambda(x) = \begin{cases} 100xe^{-10\cdot x} & dla \quad x > 0 \\ 0 & dla \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Przeprowadzamy doświadczenie dwuetapowe: najpierw losujemy ubezpieczonego z populacji, następnie ubezpieczony ten generuje szkody w dwóch kolejnych latach w liczbie N_1 i N_2, odpowiednio.

Wobec tego współczynnik korelacji liniowej $\frac{cov(N_1,N_2)}{\sqrt{var(N_1)var(N_2)}}$ wynosi:

(A) 1/5

(B) 1/10

(C) 1/11

(D) 1/50

(E) 1/55

Zadanie 5.
Rozkład wartości szkody Y określony jest na zbiorze liczb naturalnych. W tabeli podane są wartości oczekiwane nadwyżki szkody ponad d dla kolejnych (naturalnych) liczb d:

d	7	8	9	10
$E[(Y-d)_+]$	2.42	2.10	1.85	1.65

Wartość $\Pr(Y=8)$ wynosi:

(A) 0.32

(B) 0.25

(C) 0.15

(D) 0.07

(E) 0.05

Zadanie 6.

Ryzyko generuje szkody zgodnie ze złożonym procesem Poissona, z częstotliwością 1/5 rocznie; wartość pojedynczej szkody ma rozkład wykładniczy z niezmienną w czasie wartością oczekiwaną równą 5000.

Odstępy w czasie między momentami zajścia szkód a momentami wypłaty odpowiadających im odszkodowań są także niezależnymi (nawzajem oraz od przebiegu złożonego procesu Poissona) zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym, z wartością oczekiwaną równą 1/2 roku.

Składka za ubezpieczenie pełne od tego ryzyka na okres roku płatna jest jednorazowo z góry. Niech i oznacza efektywną stopę procentową (roczną), a d oraz δ odpowiednio efektywną stopę dyskonta i natężenie oprocentowania. Składka równa zdyskontowanym oczekiwanym wypłatom odszkodowań wynosi:

(A) $1000 \cdot \frac{d}{\delta} \cdot \frac{2}{2+\delta}$

(B) $1000 \cdot \frac{d}{\delta} \cdot \frac{1}{1+\delta}$

(C) $1000 \cdot (1-d)$

(D) $1000 \cdot \frac{\delta}{i} \cdot (1-d)$

(E) $1000 \cdot \frac{\delta}{i} \cdot \sqrt{1-d}$

Zadanie 7.

Liczba szkód N w ciągu roku w pewnym ubezpieczeniu ma rozkład ujemny dwumianowy:

$\Pr(N = k) = (k + 1)(1 - q)^2 q^k, \qquad k = 0,1,2, \ldots$

Wartość każdej ze szkód $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ ma ten sam rozkład Pareto o dystrybuancie określonej na półosi nieujemnej wzorem:

$$F_{Y_1}(y) = 1 - \left(\frac{1}{1 + y}\right)^2$$

Wartości poszczególnych szkód i liczba szkód są niezależnymi zmiennymi losowymi. Niech:

$$M := \begin{cases} \max\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_N\} & \textit{jeżeli } N > 0 \\ 0 & w\,p.p. \end{cases}$$

Wartość parametru q jest równa 9/10. Kwantyl rzędu 0.81 rozkładu zmiennej M, a więc takiej liczby $\mathrm{y}_{0.81}$, dla której:

$$\Pr(\mathrm{M} \leq \mathrm{y}_{0.81}) = 0.81$$

wynosi:

(A) $\mathrm{y}_{0.81} = 7.5$

(B) $\mathrm{y}_{0.81} = 8$

(C) $\mathrm{y}_{0.81} = 8.5$

(D) $\mathrm{y}_{0.81} = 9$

(E) $\mathrm{y}_{0.81} = 9.5$

Zadanie 8.
W jednorodnym portfelu składającym się z niezależnych ryzyk pojedyncze ryzyko generuje szkody (jedną lub więcej) z prawdopodobieństwem q. Parametr q jest znany. Ponadto wiemy, że liczba ryzyk które wygenerowały szkody (jedną lub więcej) wyniosła N_1. Niestety zagubiliśmy informacje o liczbie ryzyks bezszkodowych N_0, nie znamy więc całkowitej liczby ryzyk $N = N_0 + N_1$.
Jeśli $q = 1/5$, to warunkowa wartość oczekiwana $E(N|N_1 = 80)$ wynosi:

(A) 400

(B) 401

(C) 402

(D) 403

(E) 404

Zadanie 9.

Proces pojawiania się szkód jest procesem Poissona z liczbą szkód w ciągu roku N o wartości oczekiwanej równej λ, a wartości pojedynczych szkód (niezależne nawzajem i od procesu pojawiania się szkód) mają rozkład określony na przedziale $(0, S)$.
Ubezpieczenie roczne pokrywa wszystkie szkody, z tym że oprócz składki początkowej w kwocie cS ubezpieczony po każdej szkodzie dopłaca za odnowienie pierwotnej sumy ubezpieczenia składkę odnowieniową skalkulowaną w oparciu zasadę *pro rata temporis*, a więc:

- po szkodzie k-tej o wysokości Y_k, do której doszło w momencie czasu T_k (przy założeniu że ten moment nastąpił przed upływem roku, a więc że $T_k < 1$), dopłata wynosi $cY_k(1 - T_k)$

Całkowita składka wynosi więc $\pi = cS + c\sum_{k=1}^{\infty} Y_k(1 - T_k)_+$.
Jeśli parametry zadania wynoszą:
$\lambda = 1/2, \quad E(Y_1) = 10, \quad var(Y_1) = 170,$
to wariancja składki całkowitej $var(\pi)$ wynosi

(A) $35c^2$

(B) $40c^2$

(C) $45c^2$

(D) $50c^2$

(E) $55c^2$

Zadanie 10.
W pewnym portfelu ubezpieczeń szkody zawsze zgłaszane są nie później, niż w roku następującym po roku zajścia. Niech z ogólnej liczby N szkód zaszłych w danym roku N_0 oznacza liczbę szkód zgłoszonych w tym samym roku, zaś N_1 liczbę szkód zgłoszonych w roku następnym. Załóżmy, że:
Ogólna liczba szkód N ma rozkład dwumianowy z parametrami (n, q) (liczba prób, p-stwo sukcesu w pojedynczej próbie), zaś zmienne N_0 oraz N_1 mają rozkłady złożone:

- $N_0 = M_1 + M_2 + \cdots + M_N$,
- $N_1 = (1 - M_1) + (1 - M_2) + \cdots + (1 - M_N)$,

gdzie pojedynczy składnik M_k przyjmuje wartość zero, gdy k-ta szkoda zgłoszona została w tym samy roku w którym zaszła, zaś wartość 1 jeżeli zgłoszenie nastąpiło w roku następnym.
Na koniec roku dokonujemy predykcji liczby niezgłoszonych jeszcze szkód z tego roku:

$$Pred(N_1|N_0) = a + bN_0,$$

przy czym dobieramy współczynniki a oraz b tak, by zminimalizować błąd średniokwadratowy predyktora.

Jeśli parametry zadania wynoszą:
$(n, q) = (1070, 1/10)$, oraz $\Pr(M_1 = 1) = 2/3$,
zaś liczba szkód zgłoszonych N_0 wyniosła 90,
to wartość naszego predyktora wyniesie:

(A) 35

(B) $35\frac{1}{3}$

(C) $35\frac{2}{3}$

(D) 36

(E) $36\frac{1}{3}$

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 26 listopada 2018r.

Matematyka pozostałych ubezpieczeń osobowych i majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : .... KL U C Z   O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	D	
2	B	
3	E	
4	C	
5	D	
6	A	
7	B	
8	E	
9	C	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.