Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXVIII Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 26 marca 2018r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej ....

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.

Wektor losowy (X, Y) ma rozkład ciągły o gęstości

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{dla } \{(x,y) : (x,y) \in (0,1)^2,\ y > x\}, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Jakie jest prawdopodobieństwo, że $\left[\frac{Y}{X}\right]$ jest liczbą parzystą? Przez $[z]$ oznaczamy liczbę całkowitą najbliższą liczbie z (przyjmujemy $[n+1/2] = n$ dla liczby całkowitej n).

(A) $\frac{\pi}{2} - 1$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $1 - e^{-4}$

(D) $2 - \frac{\pi}{2}$

(E) $1 - e^{-1}$

Zadanie 2.

Niech $X_1,\dots,X_n, n \geq 1$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na odcinku (0,1). Niech $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ oraz $Z_n = \max\{X_1,\dots,X_n\}$. Ile wynosi $Cov(S_n, Z_n)$?

(A) $\frac{n}{2(n+1)(n+2)}$

(B) $\frac{3}{2(n+1)(n+2)^2}$

(C) $\frac{1}{(n+1)^2(n+2)}$

(D) $\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$

(E) $\frac{1}{2n(n+1)(n+2)}$

Zadanie 3.

Załóżmy, że zmienna losowa X ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda_1 > 0$, a zmienna losowa Y ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda_2 > 0$ oraz, że X i Y są niezależne.
Ile wynosi $Var(X|X+Y=n)$ dla $n \geq 1$?

(A) $\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_2)^n}n$

(B) $\left(\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^n$

(C) $\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_2)^2}n$

(D) $\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}n$

(E) $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}n$

Zadanie 4.

Niech $X_1, \ldots, X_{2n}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym $N(\mu, \sigma^2)$, gdzie średnia μ i wariancja σ^2 nie są znane. Oznaczmy $\hat{X}_{2n} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} X_i$. Wiemy, ile wynosi $\hat{X}_{2n}$, ale mamy dostęp tylko do obserwacji $X_1, \ldots, X_n$. Statystyka

$$S^2 = \frac{1}{n-\rho}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{X}_{2n})^2$$

jest nieobciążonym estymatorem parametru σ^2. Ile wynosi ρ?

(A) Nie istnieje takie ρ

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{n}{2} + 1$

(D) $\frac{1}{4}$

(E) 1

Zadanie 5.

Niech (X,Y) będzie wektorem losowym o dystrybuancie

$$F_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-x})(1-e^{-y})(1+\alpha e^{-x}e^{-y}), & x>0, y>0,\\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku},\end{cases}$$

gdzie $\alpha \geq 0$. Ile wynosi $E(\min(X,Y))$?

(A) $\frac{1}{12}\alpha+\frac{1}{2}$

(B) $\frac{\alpha+1}{2}$

(C) $\frac{1}{6}e^{-\alpha}+\frac{1}{2}$

(D) $\frac{1}{6}\alpha+\frac{1}{2}$

(E) $\frac{1}{2}e^{-\alpha}$

Zadanie 6.

Wektor (X,Y) ma dwuwymiarowy rozkład normalny $N(\mu,\Sigma)$ ze średnią $\mu = (0,1)$ i z macierzą kowariancji

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Ile wynosi $Cov(X^2,Y)$?

(A) 3

(B) $\frac{3}{4}$

(C) 0

(D) 4

(E) 6

Zadanie 7.

Niech $S_n := \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}\right\}, n \geq 6$. Dla $\{a_1, \ldots, a_m\} = S \subseteq S_n$ (oczywiście $1 \leq m \leq n-1$) niech $P(S)$ oznacza iloczyn wszystkich elementów z S, tzn. $P(S) = \prod_{i=1}^{m} a_i$. Zdefiniujmy

$$T_{parz} = \sum_{\substack{S \subseteq S_n: \\ |S| \text{ jest parzyste}}} P(S),$$

tzn. T_{parz} jest sumą wszystkich takich iloczynów dla wszystkich podzbiorów S o parzystej liczbie elementów. Ile wynosi T_{parz}?

(A) $\dfrac{31n^2 - 72n + 17}{120(n+1)}$

(B) $\dfrac{n^3 + 2n^2 + 3n + 1}{n+1}$

(C) $\dfrac{n^2 + n + 2}{4n}$

(D) $\dfrac{n^4 - 10n^3 + 36n^2 - 53n + 26}{4n}$

(E) $\dfrac{n^2 - 3n + 2}{4n}$

Zadanie 8.

Załóżmy, że chcemy wyestymować $\ln(2) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$ poprzez symulacje, dwoma metodami. Ustalmy parzyste $n \geq 2$.

- Metoda 1. Symulujemy niezależne zmienne losowe $U_1, U_2, \ldots, U_n$ o rozkładzie jednostajnym $U(0,1)$. Niech $Y_i = \frac{1}{1+U_i}, i = 1, \ldots, n$. Estymator
$$\hat{Y}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i.$$
- Metoda 2. Symulujemy niezależne zmienne losowe $U_1, U_2, \ldots, U_{\frac{n}{2}}$ o rozkładzie jednostajnym $U(0,1)$. Niech $Y_{2i-1} = \frac{1}{1+U_i}, Y_{2i} = \frac{1}{2-U_i}, i = 1, \ldots, n$. Estymator
$$\hat{Y}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

W obu przypadkach mamy $E\hat{Y}_1 = E\hat{Y}_2 = \ln(2)$. Ile wynosi $\frac{Var(\hat{Y}_2)}{Var(\hat{Y}_1)}$?

(A) $\frac{3-12(\ln 2)^2+4\ln 2}{3(1-2(\ln 2)^2)}$

(B) $\frac{1-\ln 2}{4(1-(\ln 2)^2)^2}$

(C) $\frac{(\ln 2)^2-1}{2(\ln 2)^2-1}$

(D) $\frac{4\ln 2-3}{8((\ln 2)^2-1)}$

(E) $\frac{1-e^2+4\ln 2}{1-2e^2}$

Zadanie 9.

Niech $X_1, \ldots, X_n, n \geq 3$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha c^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}, & x \geq c, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

gdzie parametr $c > 0$ jest znany, a parametr $\alpha > 0$ nie jest znany. Niech $\hat{\alpha}_n$ oznacza estymator parametru α otrzymany metodą największej wiarygodności.
Ile wynosi $Var(\hat{\alpha})$?

(A) $\dfrac{\alpha^2}{n}$

(B) $\dfrac{n^2}{(n-1)^2(n-2)}\alpha^2$

(C) $\dfrac{\alpha^2}{n^2-1}$

(D) $\dfrac{n^2}{(n-1)(n-2)^2}\alpha^2$

(E) $\dfrac{\alpha^2}{n+1}$

Zadanie 10.

Wysokość szkód X dla nieznanych parametrów $\alpha \in (0,1), \beta \in (0,1)$ ma następujący rozkład

$$Pr(X = x|\alpha,\beta) = \begin{cases} \alpha, & x = 0, \\ (1-\alpha)\beta(1-\beta)^{x-1}, & x = 1,2,\ldots, \end{cases}$$

Zaobserwowano $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z czego wiadomo, iż k razy zaobserwowano 0 (tzn. $X_i = 0$ dla $i \in A \subset \{1,\ldots,n\}, |A| = k$).
Załóżmy, że α i β są niezależne oraz, że α ma rozkład a priori $Beta(a_1,a_2)$, $a_1,a_2 \in (0,1)$, natomiast β ma rozkład a priori $Beta(b_1,b_2), b_1,b_2 \in (0,1)$. Zmienna o rozkładzie $Beta(v,w)$ ma gęstość:

$$f(x) = \frac{x^{v-1}(1-x)^{w-1}}{B(v,w)}, x \in (0,1), v \in (0,1), w \in (0,1),$$

gdzie $B(v,w) = \dfrac{\Gamma(v)\Gamma(w)}{\Gamma(v+w)}$, a $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}dx.$

Jaki rozkład a posteriori ma β ?

(A) $Beta(\sum_{i=1}^{n} X_i - k + b_1, (n-k) + b_2)$

(B) $Beta(n-k+b_1, n-k+b_2)$

(C) $Beta(k+b_1, n-k+b_2)$

(D) $Beta(k+a_1, n-k+a_2)$

(E) $Beta(n-k+b_1, \sum_{i=1}^{n} X_i - (n-k) + b_2)$

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 26 marca 2018r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	D	
2	A	
3	C	
4	B	
5	A	
6	C	
7	E	
8	A	
9	B	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.