# Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

# LXXVIII Egzamin dla Aktuariuszy

# Sesja egzaminacyjna w dniu 27 marca 2018 r.

## Modelowanie

**Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:** ......................................................................

**Czas trwania egzaminu: 120 minut**

# Uwagi

a) W zadaniach wartość zagrożona na poziomie ufności $\alpha$ jest definiowana jako kwantyl rzędu $\alpha$ rozkładu odpowiedniej zmiennej losowej, tzn.

$$VaR_{\alpha}(X) = \inf\{x: F_X(x) \geq \alpha\} .$$

b) W zadaniach zastosowano następujące oznaczenia:

$E(X)$ – wartość oczekiwana

$D(X)$ – odchylenie standardowe

c) Wartości $\chi^2_{\alpha;\upsilon}$ rozkładu chi-kwadrat spełniające warunek $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha;\upsilon}) = \alpha$

| $\upsilon$ \ $\alpha$ | **0,995** | **0,99** | **0,975** | **0,95** | **0,9** | **0,1** | **0,05** | **0,025** | **0,01** | **0,005** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0,000 | 0,000 | 0,001 | 0,004 | 0,016 | 2,706 | 3,841 | 5,024 | 6,635 | 7,879 |
| **2** | 0,010 | 0,020 | 0,051 | 0,103 | 0,211 | 4,605 | 5,991 | 7,378 | 9,210 | 10,597 |
| **3** | 0,072 | 0,115 | 0,216 | 0,352 | 0,584 | 6,251 | 7,815 | 9,348 | 11,345 | 12,838 |
| **4** | 0,207 | 0,297 | 0,484 | 0,711 | 1,064 | 7,779 | 9,488 | 11,143 | 13,277 | 14,860 |
| **5** | 0,412 | 0,554 | 0,831 | 1,145 | 1,610 | 9,236 | 11,070 | 12,833 | 15,086 | 16,750 |
| **6** | 0,676 | 0,872 | 1,237 | 1,635 | 2,204 | 10,645 | 12,592 | 14,449 | 16,812 | 18,548 |
| **7** | 0,989 | 1,239 | 1,690 | 2,167 | 2,833 | 12,017 | 14,067 | 16,013 | 18,475 | 20,278 |
| **8** | 1,344 | 1,646 | 2,180 | 2,733 | 3,490 | 13,362 | 15,507 | 17,535 | 20,090 | 21,955 |
| **9** | 1,735 | 2,088 | 2,700 | 3,325 | 4,168 | 14,684 | 16,919 | 19,023 | 21,666 | 23,589 |
| **10** | 2,156 | 2,558 | 3,247 | 3,940 | 4,865 | 15,987 | 18,307 | 20,483 | 23,209 | 25,188 |

d) Kwantyle rzędu 0,995 rozkładu $Gamma(\alpha, \lambda)$ (dla wybranych parametrów $\alpha, \lambda$)

| $\alpha$ \ $\lambda$ | **0,05** | **0,10** | **0,15** | **0,20** | **0,25** | **0,30** | **0,35** | **0,40** | **0,45** | **0,50** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0,5** | 78,7944 | 39,3972 | 26,2648 | 19,6986 | 15,7589 | 13,1324 | 11,2563 | 9,8493 | 8,7549 | 7,8794 |
| **1** | 105,9663 | 52,9832 | 35,3221 | 26,4916 | 21,1933 | 17,6611 | 15,1380 | 13,2458 | 11,7740 | 10,5966 |
| **1,5** | 128,3816 | 64,1908 | 42,7939 | 32,0954 | 25,6763 | 21,3969 | 18,3402 | 16,0477 | 14,2646 | 12,8382 |
| **2** | 148,6026 | 74,3013 | 49,5342 | 37,1506 | 29,7205 | 24,7671 | 21,2289 | 18,5753 | 16,5114 | 14,8603 |
| **2,5** | 167,4960 | 83,7480 | 55,8320 | 41,8740 | 33,4992 | 27,9160 | 23,9280 | 20,9370 | 18,6107 | 16,7496 |
| **3** | 185,4758 | 92,7379 | 61,8253 | 46,3690 | 37,0952 | 30,9126 | 26,4965 | 23,1845 | 20,6084 | 18,5476 |
| **3,5** | 202,7774 | 101,3887 | 67,5925 | 50,6943 | 40,5555 | 33,7962 | 28,9682 | 25,3472 | 22,5308 | 20,2777 |
| **4** | 219,5495 | 109,7748 | 73,1832 | 54,8874 | 43,9099 | 36,5916 | 31,3642 | 27,4437 | 24,3944 | 21,9550 |
| **16** | 563,2811 | 281,6406 | 187,760 | 140,820 | 112,656 | 93,8802 | 80,4687 | 70,4101 | 62,5868 | 56,3281 |

e) Wybrane kwantyle standardowego rozkładu normalnego

| $\alpha$ | **0,900** | **0,950** | **0,975** | **0,990** | **0,995** | **0,999** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_{\alpha}$ | 1,282 | 1,645 | 1,960 | 2,326 | 2,576 | 3,090 |

**Zadanie 1.**

a) Podać definicję koherentnej (spójnej) miary ryzyka.

b) Sprawdzić, czy określona poniższą formułą miara ryzyka jest koherentna (jest to zasada wariancji kalkulacji składki):

$$\varrho(X) = E(X) + \beta D^2(X),\ \beta > 0,$$

gdzie $X$ – nieujemna zmienna losowa modelująca straty.

---

**Odpowiedzi:**

**Odp. a)**

Niech $\boldsymbol{X}$ oznacza przestrzeń liniową zmiennych losowych określonych na odpowiedniej przestrzeni probabilistycznej. Funkcjonał $\varrho: \boldsymbol{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy koherentną miarą ryzyka, gdy spełnia następujące własności:

**W1**: $\varrho(X + c) = \varrho(X) + c$, dla ustalonego $X \in \boldsymbol{X}$ i dowolnego $c \in \mathbb{R}$ (funkcjonał jest ekwiwariantny ze względu na translację)

**W2**: $\varrho(aX) = a\varrho(X)$, dla ustalonego $X \in \boldsymbol{X}$ i dowolnego $a > 0$ (funkcjonał jest dodatnio jednorodny)

**W3**: Jeżeli $X_1, X_2 \in \boldsymbol{X}$ i $X_1 \le X_2$ prawie wszędzie, to $\varrho(X_1) \le \varrho(X_2)$ (funkcjonał jest monotoniczny)

**W4**: $\varrho(X_1 + X_2) \le \varrho(X_1) + \varrho(X_2)$, dla dowolnych $X_1, X_2 \in \boldsymbol{X}$ (funkcjonał jest subaddytywny)

.......................................................................................................................................

**Odp. b)**

Miara $\varrho$ nie jest koherentna. Nie spełnia warunku dodatniej jednorodności.

---

**Rozwiązanie:**

**b)** $\varrho(aX) = E(aX) + \beta D^2(aX) = aE(X) + a^2\beta D^2(X)$,

czyli $\varrho(aX) \neq a\varrho(X)$

**Zadanie 2.**
Straty dla pierwszej linii biznesu (LOB1) są modelowane za pomocą zmiennej losowej $X_1$ o rozkładzie $Gamma(\alpha = 2, \lambda = 0{,}1)$, natomiast drugiej (LOB2) – zmiennej losowej $X_2$ o rozkładzie $Gamma(\alpha = 1, \lambda = 0{,}1)$. (Uwaga! Przyjęto parametryzację, w której $E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}$, $D^2(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$.) Wymogi kapitałowe są ustalane na poziomie kapitału ekonomicznego wyznaczanego za pomocą wartości zagrożonej na poziomie ufności 0,995, tzn. $\kappa(X) = VaR_{0,995}(X) - E(X)$. Wyznaczyć efekt dywersyfikacji powstały w wyniku agregacji tych linii biznesu, jeżeli wiadomo, że:
- łączne straty są modelowane za pomocą zmiennej losowej $S = X_1 + X_2$ (funkcją agregującą jest suma),
- zmienne $X_1$ i $X_2$ są niezależne.

---

**Odpowiedzi:**

**Odp.**
$D = 34{,}5466$ (ewentualnie: $d = 0{,}3551$ lub $d' = 0{,}6449$)

---

**Rozwiązanie:**
Efekt dywersyfikacji (możliwe sposoby wyliczenia):
- $D = \kappa(X_1) + \kappa(X_2) - \kappa(S)$
- $d = 1 - \frac{\kappa(S)}{\kappa(X_1)+\kappa(X_2)}$
- $d' = \frac{\kappa(S)}{\kappa(X_1)+\kappa(X_2)}$

1. $\kappa(X_1) = VaR_{0,995}(X_1) - E(X_1)$
   $E(X_1) = \frac{2}{0{,}1} = 20$, $VaR_{0,995}(X_1) = 74{,}3013$
   $\kappa(X_1) = 54{,}3013$
2. $\kappa(X_2) = VaR_{0,995}(X_2) - E(X_2)$
   $E(X_2) = \frac{2}{0{,}1} = 10$, $VaR_{0,995}(X_2) = 52{,}9832$
   $\kappa(X_2) = 42{,}9832$
3. Ponieważ zmienne $X_1$ i $X_2$ są niezależne, suma $S = X_1 + X_2$ ma rozkład $Gamma(\alpha = 2 + 1, \lambda = 0{,}1)$. Stąd:
   $E(S) = \frac{3}{0{,}1} = 30$, $VaR_{0,995}(S) = 92{,}7379$
   $\kappa(S) = 62{,}7379$

Zatem: $D = 34{,}5466$; $d = 0{,}3551$; $d' = 0{,}6449$

**Zadanie 3.**

Straty w rocznym horyzoncie czasowym dla pierwszego rodzaju ryzyka są modelowane za pomocą zmiennej losowej $X$, która ma rozkład Pareto o gęstości: $f(x) = \frac{1}{x^2}, x > 1$, a dla drugiego – zmiennej losowej $Y$ o rozkładzie Pareto z gęstością $f(y) = \frac{2}{y^3}, y > 1$.
Niech:

- $P_N = P(X \leq VaR_{0,95}(X),\ Y \leq VaR_{0,95}(Y))$ będzie prawdopodobieństwem tego, że straty z pierwszego i drugiego rodzaju ryzyka nie przekroczą odpowiednio $VaR_{0,95}(X)$ i $VaR_{0,95}(Y)$ wyznaczonym przy założeniu, że zmienne $X$ i $Y$ **są niezależne**.
- $P_G = P(X \leq VaR_{0,95}(X), Y \leq VaR_{0,95}(Y))$ będzie prawdopodobieństwem tego, że straty z pierwszego i drugiego rodzaju ryzyka nie przekroczą odpowiednio $VaR_{0,95}(X)$ i $VaR_{0,95}(Y)$ wyznaczonym przy założeniu, że struktura zależności między zmiennymi $X$ i $Y$ jest modelowana za pomocą kopuli archimedesowej o silnym generatorze $\phi(t) = (-\ln t)^2$ (jest to kopula Gumbela-Hougaarda).

Zarówno $VaR_{0,95}(X)$ jak i $VaR_{0,95}(Y)$ odnoszą się do rocznego horyzontu czasowego.

Obliczyć: $|P_N - P_G|$.

**Odpowiedzi:**

**Odp.**

$|P_N - P_G| = 0{,}0275$

**Rozwiązanie:**

1. Jeżeli zmienne niezależne, to $F_N(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$.

$$P_N = P\left(X \leq VaR_{0,95}(X), Y \leq VaR_{0,95}(Y)\right) = F_N\left(VaR_{0,95}(X), VaR_{0,95}(Y)\right) =$$
$$= F_X\left(VaR_{0,95}(X)\right) \cdot F_Y\left(VaR_{0,95}(Y)\right) = F_X\left(F_X^{-1}(0{,}95)\right) \cdot F_Y\left(F_Y^{-1}(0{,}95)\right) =$$
$$= 0{,}95 \cdot 0{,}95 = 0{,}9025$$

2. Jeżeli zależność między zmiennymi $X$ i $Y$ jest modelowana za pomocą kopuli $C$, to $F_G(x,y) = C(F_X(x), F_Y(y))$.

$$P_G = P\left(X \leq VaR_{0,95}(X), Y \leq VaR_{0,95}(Y)\right) = F_G\left(VaR_{0,95}(X), VaR_{0,95}(Y)\right) =$$
$$= C\left(F_X\left(VaR_{0,95}(X)\right), F_Y\left(VaR_{0,95}(Y)\right)\right) = C(0{,}95\ ,\ 0{,}95).$$

W zadaniu $C$ jest kopulą Archimedesa, zatem: $C = \phi^{-1}(\phi(u) + \phi(v))$.
Stąd:
$\phi(0{,}95) = (-\ln(0{,}95))^2 = 0{,}002631$
$\phi^{-1}(z) = \exp(-\sqrt{z})$
$C(0{,}95\ , 0{,}95) = exp\left(-\sqrt{2 \cdot 0{,}002631}\right) = 0{,}9300$

## Zadanie 4.

Wykorzystując stosowaną standardowo w Solvency II metodę agregacji (tj. metodę wariancji-kowariancji), ustalono łączny kapitałowy wymóg wypłacalności dla modułu ryzyka aktuarialnego w ubezpieczeniach innych niż ubezpieczenia na życie ($SCR_{non-life}$) na poziomie 50. Wynik otrzymano wiedząc, że:

- wymóg kapitałowy dla podmodułu ryzyka katastroficznego w ubezpieczeniach innych niż ubezpieczenia na życie jest równy: $SCR_{nlCAT} = 20$,
- wymóg kapitałowy dla podmodułu ryzyka związanego z rezygnacjami w ubezpieczeniach innych niż ubezpieczenia na życie jest równy: $SCR_{nlLAPSE} = 10$,
- współczynniki korelacji liniowej między poszczególnymi podmodułami ryzyka są następujące:

| | X | $SCR_{nlCAT}$ | $SCR_{nlLAPSE}$ |
|---|---|---|---|
| X | 1 | 0,25 | 0 |
| $SCR_{nlCAT}$ | 0,25 | 1 | 0 |
| $SCR_{nlLAPSE}$ | 0 | 0 | 1 |

a) Jak nazywa się podmoduł oznaczony w tabeli ze współczynnikami korelacji przez X?
b) Obliczyć dla tego podmodułu kapitałowy wymóg wypłacalności.
c) Wyznaczyć efekt dywersyfikacji.

---

**Odpowiedzi:**

**Odp. a)**
Podmoduł ryzyka składki i rezerw w ubezpieczeniach innych niż ubezpieczenia na życie.

.....................................................................................................................

**Odp. b)**
$SCR_{nl\,prem\,res} = 40$

.....................................................................................................................

**Odp. c)**
$D = 20$ (ewentualnie: $d = 0{,}2857$ lub $d' = 0{,}7143$)

---

**Rozwiązanie:**

**b)** Wymóg kapitałowy dla podmodułu ryzyka składki i rezerw w ubezpieczeniach innych niż ubezpieczenia na życie można wyznaczyć rozwiązując równanie:

$$[x \quad 20 \quad 10] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0{,}25 & 0 \\ 0{,}25 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix} = 50^2$$

$$x^2 + 10x - 2000 = 0.$$

Stąd $x_1 = 40$ (drugie rozwiązanie jest ujemne).

**c)** $D = 40 + 20 + 10 - 50 = 20$

$$d = 1 - \frac{50}{40 + 20 + 10} = 0{,}2857$$

$$d' = \frac{50}{40 + 20 + 10} = 0{,}7143$$

**Zadanie 5.**

Straty dla pierwszej linii biznesu (LOB1) są modelowane za pomocą zmiennej losowej $X_1$ o rozkładzie Pareto z gęstością $f(x_1) = \frac{2}{x_1^3}, x_1 > 1$, dla drugiej (LOB2) – zmiennej losowej $X_2$ o rozkładzie $Gamma(\alpha = 3, \lambda = 0{,}5)$. (Uwaga! Przyjęto parametryzację, w której $E(X_2) = \frac{\alpha}{\lambda}$, $D^2(X_2) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$.). Struktura zależności między stratami $X_1$ i $X_2$ (wektora losowego $(X_1, X_2)$) jest modelowana za pomocą kopuli Gumbela z parametrem $\theta = 2$.
W celu wyznaczenia wartości zagrożonej na poziomie ufności 0,95 dla łącznych strat, tzn. $VaR_{0,95}(S)$, gdzie $S = X_1 + X_2$ zastosowano symulacyjną metodę agregacji za pomocą kopuli (Gumbela z parametrem $\theta = 2$).

a) Wiadomo, że z kopuli wygenerowano następującą parę (obserwację): $(u_1, v_1) = (0{,}717\ ,\ 0{,}995)$. Wyznaczyć odpowiadającą tej parze wartość sumy $S = X_1 + X_2$ (realizację zmiennej $S$).
b) Poniższa tabela przedstawia wyniki symulacji:

| Uzyskane podczas symulacji realizacje zmiennej $S$ $s_i$ | Liczba realizacji z danego przedziału $n_i$ |
|---|---|
| (0, 5] | 300 |
| (5, 10] | 450 |
| (10, 15] | 180 |
| (15, 20] | 45 |
| (20, 30] | 20 |
| (30, 60] | 5 |
| powyżej 60 | 0 |

Oszacować $VaR_{0,95}(S)$, przyjmując jednostajny rozkład realizacji $s_i$ w poszczególnych przedziałach klasowych (czyli na podstawie krzywej ogiwalnej).

**Odpowiedzi:**

**Odp. a)**

$s_1 = 20{,}427379$

.......................................................................................................................................

**Odp. b)**

$VaR_{0,95}(S) = 17{,}2222$

**Rozwiązanie:**

**a)**

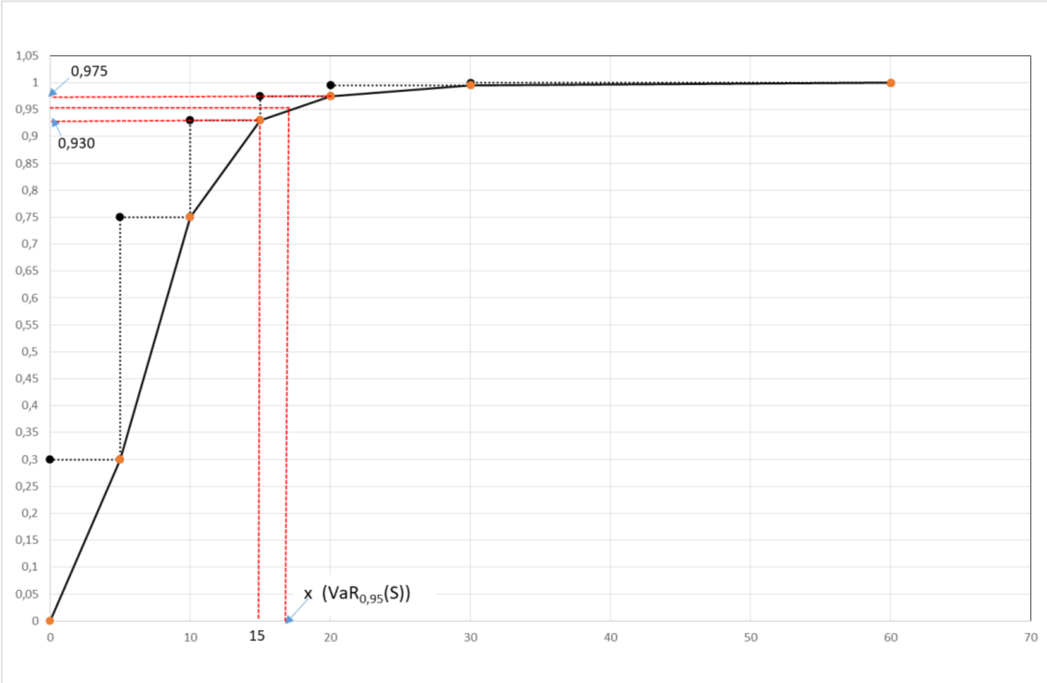
$s_1 = F_1^{-1}(u_1) + F_2^{-1}(v_1)$

$F_1(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, stąd $F_1^{-1}(u) = \sqrt{\frac{1}{1-u}}$, zatem $F_1^{-1}(0{,}717) = 1{,}879779$

$F_2^{-1}(0{,}995) = 18{,}5476$

$s_1 = 1{,}879779 + 18{,}5476 = 20{,}427379$

**b)**




Wartość zagrożoną $VaR_{0,95}(S)$ można wyznaczyć rozwiązując następujące równanie:

$$\frac{20-15}{0{,}975-0{,}930} = \frac{x-15}{0{,}950-0{,}930}.$$

Stąd $x = 17{,}2222$.

**Zadanie 6.**

Wysokość szkód ($Y$) modelowano wykorzystując uogólniony model liniowy (GLM). Przyjęto rozkład gamma dla zmiennej zależnej $Y$ oraz logarytmiczną funkcję wiążącą (*link function*). Uwzględniono dwie zmienne niezależne (regresory):

– wiek samochodu (*wiek.samochodu*), przyjmującą 4 kategorie wiekowe: wiek1, wiek2, wiek3, wiek4,
– miejsce rejestracji (*m.rejestracji*), przyjmującą 6 kategorii związanych z obszarem rejestracji: A, B, C, D, E, F.

Uzyskano następujące wyniki:

| Zmienna | Oszacowanie |
|---|---|
| wyraz wolny (Intercept) | 7,317033 |
| *wiek.samochodu:* wiek2 | 0,095588 |
| *wiek.samochodu:* wiek3 | 0,132231 |
| *wiek.samochodu:*wiek4 | 0,210605 |
| *m.rejestracji:* B | 0,043452 |
| *m.rejestracji:* C | 0,139058 |
| *m.rejestracji:* D | -0,009905 |
| *m.rejestracji:* E | 0,239069 |
| *m.rejestracji:* F | 0,356198 |

Wiadomo, że parametr dyspersji wynosi: 2,853176.

Niech:

$\hat{\mu}_{(wiek1,A)}$ - oznacza prognozę wysokości szkody dla samochodu z pierwszej kategorii wiekowej (wiek1) i zarejestrowanego w obszarze A,

$\hat{\mu}_{(wiek1,F)}$ - oznacza prognozę wysokości szkody dla samochodu z pierwszej kategorii wiekowej (wiek1) i zarejestrowanego w obszarze F.

a. Obliczyć: $\hat{\mu}_{(wiek1,F)} - \hat{\mu}_{(wiek1,A)}$.
b. Obliczyć wariancję i odchylenie standardowe prognozy $\hat{\mu}_{(wiek1,A)}$.
c. Dla jakiej grupy samochodów (tzn. w jakim wieku i miejscu rejestracji) prognoza wysokości szkód będzie najniższa?

---

**Odpowiedzi:**

**Odp. a)**

$\hat{\mu}_{(wiek1,F)} - \hat{\mu}_{(wiek1,A)} = 644{,}2871$

...................................................................................................................................

**Odp. b)**

$D^2\left(\hat{\mu}_{(wiek1,A)}\right) = 6468784{,}356, \quad D\left(\hat{\mu}_{(wiek1,A)}\right) = 2543{,}380$

...................................................................................................................................

**Odp. c)**

Dla samochodu z grupy wiekowej *wiek1* i obszaru rejestracji *D*.

---

**Rozwiązanie:**

**a)**

$$\hat{\mu}_{(wiek1,F)} = \exp(7{,}317033 + 0{,}353198) = 2150{,}01694$$

$$\hat{\mu}_{(wiek1,A)} = \exp(7{,}317033) = 1505{,}729835$$

**b)**
W przypadku rozkładu gamma wariancja $D^2(y) = \phi\mu^2$,
gdzie:

$\phi$ - parametr dyspersji,

$\mu$ - średnia.

Zatem:

$D^2\left(\hat{\mu}_{(wiek1,A)}\right) = 2{,}853176 \cdot 1505{,}729835^2 = 6468784{,}356$

$D\left(\hat{\mu}_{(wiek1,A)}\right) = 2543{,}380$

**Zadanie 7.**

W poniższej tabeli przedstawiono dane dotyczące liczby wypadków (odnotowanych w ciągu jednego roku) oraz wieku (w latach) dla 6 kierowców.

| Nr kierowcy ($i$) | Wiek ($x_i$) | Liczba wypadków ($y_i$) |
|---|---|---|
| 1 | 30 | 3 |
| 2 | 40 | 1 |
| 3 | 35 | 0 |
| 4 | 35 | 2 |
| 5 | 20 | 4 |
| 6 | 40 | 0 |
| Suma | 200 | 10 |

Zakładamy, że $y_1, y_2, \dots y_6$ są realizacjami niezależnych zmiennych losowych $Y_1, Y_2, \dots Y_6$ o rozkładach Poissona ze średnią $\lambda_i = \beta x_i, i = 1,2 \dots ,6$.

a) Wykorzystując Metodę Największej Wiarygodności oszacować parametr $\beta$.
b) Wykorzystując oszacowany model wyznaczyć prawdopodobieństwo, że 50-cio letni kierowca spowoduje więcej niż jeden wypadek.

---

**Odpowiedzi:**

**Odp. a)**
$\hat{\beta} = 0,05$

......................................................................................................................................

**Odp. b)**
$P(Y > 1) = 0,7127$

---

**Rozwiązanie:**

**a)** $L(\beta) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\exp(-\beta x_i)\cdot(\beta x_i)^{y_i}}{y_i!}$

$$l(\beta) = \ln\big(L(\beta)\big) = \sum_{i=1}^{n} [-\beta x_i + y_i \ln(\beta) + y_i \ln(x_i) - \ln(y_i!)]$$

$$l'(\beta) = -\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

W zadaniu: $l'(\beta) = -200 + \frac{10}{\beta}$.

$l'(\beta) = 0$, gdy $\beta = \frac{1}{20}$, zatem $\hat{\beta} = 0,05$.

**b)** W przypadku 50-cio letniego kierowcy parametr rozkładu Poissona wynosi:

$$\lambda = 0,05 \cdot 50 = 2,5$$

Stąd $P(Y > 1) = 1 - \big(P(Y = 0) + P(Y = 1)\big) = 1 - 3,5 \cdot \exp(-2,5) = 0,7127$

## Zadanie 8.

W poniższej tabeli przedstawiono dane 12 losowo wybranych kierowców dotyczące:

- liczby wypadków (zmienna *liczba*),
- wieku (zmienna *wiek* [w latach]),
- płci (zmienna *plec*, gdzie: K - kobieta, M - mężczyzna),
- użytkowania samochodu (zmienna *uzytkowanie*, gdzie: P – w celach prywatnych, S- w celach służbowych).

| Nr obserwacji | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* | *10* | *11* | *12* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *liczba* | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 | 0 | 3 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| *wiek* | 45 | 50 | 25 | 30 | 45 | 20 | 30 | 22 | 50 | 30 | 30 | 50 |
| *plec* | M | K | M | K | K | K | M | M | M | K | M | K |
| *uzytkowanie* | P | P | S | S | P | S | P | S | S | P | P | P |

Na podstawie tych danych oszacowano uogólniony model liniowy (GLM) dla liczby wypadków. W modelu tym dla zmiennej zależnej przyjęto rozkład Poissona z logarytmiczną funkcją wiążącą (*link function*) oraz uwzględniono wszystkie zmienne objaśniające (tj. *wiek, plec* i *uzytkowanie*).

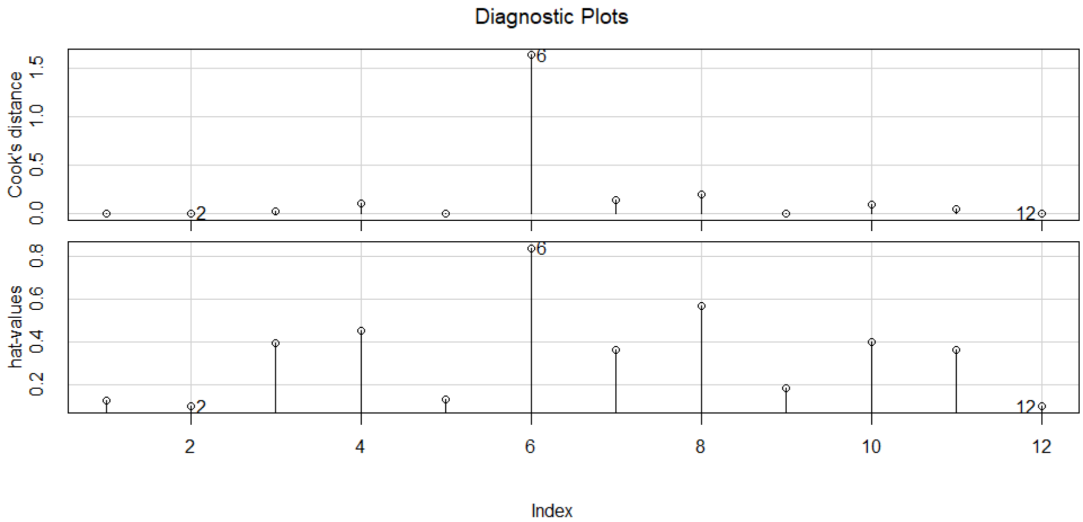
Otrzymano następujące parametry modelu:

| (Intercept) | *wiek* | *plec* M | *uzytkowanie* S |
|---|---|---|---|
| 4.0816990 | -0,1549239 | 0,1067970 | 0,0257586 |

oraz elementy leżące na głównej przekątnej macierzy „daszkowej” H (*hat matrix)*:

**0,1235 0,0948 0,3909 0,4494 0,1301 0,8394 0,3633 0,5691 0,1808 0,4007 0,3633 0,0948**

Ponadto wyznaczono następujący wykres diagnostyczny (na osi poziomej są numery obserwacji):




a) Zinterpretować wykres diagnostyczny.
b) Dla szóstej obserwacji wyznaczyć resztę Pearsona i miarę Cooka (*Cook's distance*).

## Odpowiedzi:

**Odp. a)**

1. *Cook's distance*: Można uznać, że obserwacja nr 6 miała istotny wpływ na obciążenie parametrów modelu.
2. *hat-values*: Obserwację nr 6 można uznać za wpływową, tzn. mającą istotny wpływ na wartość teoretyczną $\hat{\mu}_6$

.......................................................................................................................................

**Odp. b)**
Resztę Pearsona: $e_{P,6} = -0{,}44851$
Miara Cooka: $D_6 = 1{,}63669$

---

**Rozwiązanie:**

**b)**

1. Reszta Pearsona: $e_{P,i} = \frac{y_i - \hat{\mu}_i}{\sqrt{D^2(y_i|\boldsymbol{x})/\phi}}$.

W modelu Poissona parametr dyspersji $\phi = 1$ oraz $D^2(y_i|\boldsymbol{x}) = \mu_i$ .
Wartość teoretyczna dla obserwacji nr 6 wynosi:
$\hat{\mu}_6 = \exp(4{,}081699 - 0{,}1549239 \cdot 20 + 0{,}0257586) = 2{,}7428.$
Stąd:

$$e_{P,6} = \frac{2 - 2{,}7428}{\sqrt{2{,}7428}} = -0{,}44851.$$

2. Miara Cooka: $D_i = \frac{e_{PS,i}^2}{k} \cdot \frac{h_i}{1-h_i}$,

gdzie:

$e_{PS,i} = \frac{y_i - \hat{\mu}_i}{\sqrt{D^2(y_i|\boldsymbol{x})(1-h_i)}}$ - standaryzowana reszta Pearsona;

$k$ – liczba parametrów modelu;
$h_i$ – $i$-ty element leżący na głównej przekątnej macierzy „daszkowej" H.
Zatem dla szóstej obserwacji:

$e_{PS,6} = \frac{2-2{,}7428}{\sqrt{2{,}7428 \cdot (1-0{,}8394)}} = -1{,}119185,$

skąd $D_6 = \frac{(-1{,}119185)^2}{4} \cdot \frac{0{,}8394}{1-0{,}8394} = 1{,}63669.$

**Zadanie 9.**

Dla pewnego portfela ubezpieczeń, wykorzystując model ryzyka kolektywnego oszacowano następujące parametry rozkładu zmiennej łącznych szkód $Z$:

– wartość oczekiwaną: $\mu_Z = 100$,
– wariancję: $\sigma_Z^2 = 1600$,
– współczynnik skośności: $\gamma_Z = 0{,}5$.

Rozkład zmiennej $Z$ aproksymowano wykorzystując:

1. rozkład normalny,
2. przesunięty rozkład gamma, tzn. przyjęto, że $Z \approx Y + c$, gdzie $Y$ ma rozkład gamma, a $c$ jest parametrem przesunięcia.

Wyznaczyć różnicę między oszacowaniem składki kwantylowej na poziomie ufności 0,995 uzyskanym za pomocą pierwszego i drugiego przybliżenia, tzn.:

$$|F_1^{-1}(0{,}995) - F_2^{-1}(0{,}995)|,$$

gdzie $F_1$ i $F_2$ oznaczają dystrybuanty odpowiednio dla pierwszej i drugiej metody aproksymacji.

**Uwaga!** Współczynnik skośności dla rozkładu gamma jest równy: $\gamma = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$ (w parametryzacji, w której $E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}$, $D^2(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$).

---

**Odpowiedzi:**

**Odp.**

$$|F_1^{-1}(0{,}995) - F_2^{-1}(0{,}995)| = 18{,}6006$$

---

**Rozwiązanie:**

1. Rozkład normalny: $Z \sim N(100; 40)$,
Stąd $F_1^{-1}(0{,}995) = 100 + \Phi^{-1}(0{,}995) \cdot 40 = 100 + 2{,}576 \cdot 40 = 203{,}04$.

2. Przesunięty gamma.
Parametry wyznaczamy rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} \mu_Z = c + \dfrac{\alpha}{\lambda} \\ \sigma_Z^2 = \dfrac{\alpha}{\lambda^2} \\ \gamma_Z = \dfrac{2}{\sqrt{\alpha}} \end{cases}$$

Otrzymujemy:

$$c = \mu_Z - \frac{2\sigma_Z}{\gamma_Z} = -60; \qquad \alpha = \frac{4}{\gamma_Z^2} = 16; \qquad \lambda = \frac{2}{\gamma_Z \cdot \sigma_Z} = 0{,}1.$$

Korzystamy z następującej własności funkcji odwrotnej do dystrybuanty:

$$F_{g(X)}^{-1}(p) = g(F_X^{-1}(p)), \text{ gdy } g \text{ jest funkcją rosnącą i ciągłą,}$$

otrzymując $F_2^{-1}(0{,}995) = c + F_Y^{-1}(0{,}995) = -60 + 281{,}6406 = 221{,}6406$.

## Zadanie 10.

Na podstawie tego samego zbioru danych oszacowano dwa uogólnione modele liniowe M1 i M2. Wiadomo, że w modelu M2 uwzględniono wszystkie zmienne objaśniające z modelu M1 i dodano jedną zmienną jakościową, przyjmującą trzy wartości (kategorie): K1, K2 i K3. Dla modelu M1 wartość kryterium informacyjnego AIC wynosi: 22,548, a dla M2: 25,833. Sprawdzić na poziomie istotności 0,05, czy model M2 ma lepszą zdolność predykcyjną w porównaniu z modelem M1 (tzn. czy dodanie do M1 dodatkowej zmiennej istotnie wpływa na polepszenie zdolności predykcyjnej).

---

## Odpowiedzi:

**Odp.**

Stosując test oparty na ilorazie wiarygodności, na poziomie istotności 0,05, nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że model M1 jest tak samo dobry jak M2. Zatem można przyjąć, że M2 nie ma lepszych zdolności predykcyjnych w porównaniu z M1.

---

**Rozwiązanie:**

Statystyka testowa: $T = 2(l_2 - l_1)$, gdzie $l_2,\ l_1$ to logarytmy wiarygodności odpowiednio modelu M2 i M1.

Korzystając z kryterium informacyjnego AIC:

M1: $AIC_1 = 2(-l_1 + k_1)$

M2: $AIC_2 = 2(-l_2 + k_1 + 2)$ .

Po przekształceniach:

$$\begin{cases} AIC_1 = -2l_1 + 2k_1 \\ AIC_2 = -2l_2 + 2k_1 + 4' \end{cases}$$

skąd

$$2(l_2 - l_1) = AIC_1 - AIC_2 + 4.$$

Zatem

$$T = 22{,}548 - 25{,}833 + 4 = 0{,}715.$$

Wartość krytyczna:

$$\chi^2_{0,05;2} = 5{,}991$$

# Egzamin dla Aktuariuszy
## Sesja egzaminacyjna w dniu 27 marca 2018r.

## Modelowanie

## Arkusz ocen

| Zadanie nr | Punktacja |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |
| 7 | |
| 8 | |
| 9 | |
| 10 | |
| | |