Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXVIII Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 26 marca 2018r.

Matematyka pozostałych ubezpieczeń osobowych i majątkowych

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: ....

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.
Proces nadwyżki ubezpieczyciela jest złożonym procesem Poissona ze stosunkowym narzutem bezpieczeństwa na składkę netto θ. Wartość pojedynczej szkody Y jest zmienną losową o rozkładzie prawdopodobieństwa gamma $\Gamma(\alpha, \beta)$, $\alpha = 2$, $\beta = 2$.
Ile wynoszą wartość oczekiwana $E(l_1)$ i wariancja $var(l_1)$ zmiennej l_1, wyrażającej (na półosi dodatniej) spadek, jakiemu ulegnie nadwyżka po raz pierwszy, licząc od jej poziomu początkowego, o ile kiedykolwiek do takiego spadku dojdzie?

(A) $E(l_1) = 3/4, \;\; var(l_1) = 7/16$

(B) $E(l_1) = 3/4, \;\; var(l_1) = 8/16$

(C) $E(l_1) = 1, \;\; var(l_1) = 7/16$

(D) $E(l_1) = 1, \;\; var(l_1) = 8/16$

(E) żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

Zadanie 2.
W modelu nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym składka należna za rok wynosi 2, a rozkład łącznej wartości szkód za *n*-ty rok W_n dany jest dla każdego n wzorem:
$\Pr(W_n = k) = p \cdot q^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$
gdzie $p = 1 - q$,
i gdzie zakładamy iż $p > \frac{1}{3}$,
oraz iż $W_1, W_2, \ldots$ są nawzajem niezależne.
W tym modelu współczynnik przystosowania (*adjustment coefficient*) R wynosi:

(A) $\ln\left(\dfrac{q + \sqrt{5pq}}{2p}\right)$

(B) $\ln\left(\dfrac{p + \sqrt{5pq}}{2q}\right)$

(C) $\ln\left(\dfrac{q + \sqrt{2 - 2q^2}}{2p}\right)$

(D) $\ln\left(\dfrac{p + \sqrt{p^2 + 4pq}}{2q}\right)$

(E) $\ln\left(\dfrac{q + \sqrt{q^2 + 4pq}}{2p}\right)$

Zadanie 3.
Zakładamy ten sam model, co w zadaniu poprzednim, tzn:
model nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym, ze składką roczną równą 2, i rozkładem łącznej wartości szkód za n-ty rok W_n danym dla każdego n wzorem:
$\Pr(W_n = k) = p \cdot q^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$
gdzie $p = 1 - q$,
oraz iż $W_1, W_2, \ldots$ są nawzajem niezależne.
Tym razem przyjmujemy konkretną wartość parametru $p = 1/2$. Przyjmujemy ponadto, iż wartość nadwyżki początkowej równa jest 1.
Prawdopodobieństwo ruiny (w nieskończonym horyzoncie czasowym) wynosi:

(A) $\frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}$

(B) $\frac{7 - 3\sqrt{5}}{4}$

(C) $\frac{7 - 6\sqrt{5}}{4}$

(D) $\frac{14 - 3\sqrt{5}}{4}$

(E) $\frac{7 + 3\sqrt{5}}{4}$

Zadanie 4.

Niech X_i oznacza wypłatę ubezpieczyciela z i-tego ryzyka, a $S=\sum_{i=1}^{n} X_i$ łączną wartość wypłat z portfela składającego się z n niezależnych ryzyk. Wiadomo, że jeśli rozkład zmiennej S daje się dobrze aproksymować rozkładem normalnym, to łączna składka dana wzorem:

$$\Pi(S)=E(S)+1.645\cdot\sqrt{VAR(S)}$$

zapewnia, iż prawdopodobieństwo poniesienia straty wynosi 0.05. Załóżmy, iż wczoraj sprzedaliśmy pokrycie wszystkich ryzyk składających się na portfel S w zamian za składkę w wysokości zgodnej z powyższym wzorem.

Dziś zgłosiło się do ubezpieczenia ryzyko $(n+1)$-sze. Zakładamy, iż jest ono niezależne od innych ryzyk, oraz że po dołączeniu tego ryzyka do portfela aproksymacja rozkładem normalnym jest nadal uprawniona (w szczególności zakładamy, iż wariancja dodatkowego ryzyka jest mała w stosunku do wariancji całego portfela).

Chcemy, aby nadal spełniony był ten sam postulat bezpieczeństwa, a więc aby:

$$\Pr\left(S+X_{n+1}>\Pi(S)+\Pi(X_{n+1})\right)=0.05.$$

Która z poniższych formuł składki za ryzyko $(n+1)$-sze najlepiej przybliża spełnienie tego postulatu?

(A) $\Pi(X_{n+1})=E(X_{n+1})+1.645\cdot\sqrt{VAR(X_{n+1})}$

(B) $\Pi(X_{n+1})=E(X_{n+1})+1.645\cdot VAR(X_{n+1})$

(C) $\Pi(X_{n+1})=E(X_{n+1})+1.645\cdot\dfrac{VAR(X_{n+1})}{\sqrt{VAR(S)}}$

(D) $\Pi(X_{n+1})=E(X_{n+1})+1.645\cdot 2\cdot\dfrac{VAR(X_{n+1})}{\sqrt{VAR(S)}}$

(E) $\Pi(X_{n+1})=E(X_{n+1})+1.645\cdot\dfrac{VAR(X_{n+1})}{2\cdot\sqrt{VAR(S)}}$

Zadanie 5.
Portfel składa się z 2000 niezależnych, identycznych ryzyk. Dla każdego z nich liczba szkód ma rozkład Poissona z parametrem częstotliwości 0.05, a wartość szkody ma zawsze (niezależnie od liczby i wartości ewentualnych innych szkód) rozkład jednostajny na przedziale $(0,1)$.
Uznano, iż rozkład łącznej wartości szkód z portfela ma zbyt wysoki wskaźnik skośności (stosunek trzeciego momentu centralnego do sześcianu odchylania standardowego). Rozważa się odstąpienie reasekuratorowi nadwyżki każdej szkody z portfela ponad *d*.

Wskaż taką wartość $d \in (0,1)$, dla której wskaźnik skośności wyniesie 0.1

(A) 0.8

(B) 0.6

(C) 0.4

(D) 0.2

(E) takie $d \in (0,1)$ nie istnieje

Zadanie 6.
O łącznej wartości szkód X z pewnego kontraktu ubezpieczeniowego wiemy, iż:

- jest nieujemna, tzn. $\Pr(X \geq 0) = 1$;
- ma wartość oczekiwaną równą 20;
- wartość oczekiwana nadwyżki ponad 10 wynosi 13, tzn.: $E[(X - 10)_+] = 13$
- wartość szkód jest mniejsza od 10 z prawdopodobieństwem 0.5.

Zbiór wszystkich możliwych wartości $E[(X - 5)_+]$ to przedział:

(A) $[15.5, \quad 16.0)$

(B) $[15.5, \quad 16.5)$

(C) $[15.0, \quad 16.0)$

(D) $[15.0, \quad 16.5)$

(E) $[15.0, \quad 15.5)$

Zadanie 7.
Liczba szkód N w ciągu roku w pewnym ubezpieczeniu ma rozkład geometryczny:
$\Pr(N = k) = \frac{2^k}{3^{k+1}}, \qquad k = 0,1,2,\ldots$
Wartość każdej ze szkód $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ ma ten sam rozkład Pareto o dystrybuancie określonej na półosi nieujemnej wzorem:

$$F_{Y_1}(y) = \frac{y}{1+y}$$

Wartości poszczególnych szkód i liczba szkód są niezależnymi zmiennymi losowymi.
Niech:

$$M := \begin{cases} \max\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_N\} & jeżeli\ N > 0 \\ 0 & w\ p.p. \end{cases}$$

Mediana rozkładu zmiennej M, a więc taka liczba y, dla której:

$$\Pr(\mathrm{M} \le \mathrm{y}) = \frac{1}{2}$$

Wynosi:

(A) 1/2

(B) 1

(C) 3/2

(D) 2

(E) 5/2

Zadanie 8.

Wiadomo, że zmienne losowe N_1, N_2, N_3 są niezależne, i przyjmują wartości całkowite nieujemne. Ich funkcje prawdopodobieństwa określone na tym zbiorze spełniają zależności rekurencyjne:

$$\Pr(N_1 = k) = \left(\frac{4}{k} - 1\right)\Pr(N_1 = k-1), \qquad k = 1,2,\ldots$$

$$\Pr(N_2 = k) = \left(\frac{3}{k} - 1\right)\Pr(N_2 = k-1), \qquad k = 1,2,\ldots$$

$$\Pr(N_3 = k) = \left(\frac{2}{k} - 1\right)\Pr(N_3 = k-1), \qquad k = 1,2,\ldots$$

Wobec tego $\Pr(N_1 + N_2 + N_3 = 3)$ wynosi:

(A) $\frac{8}{32}$

(B) $\frac{9}{32}$

(C) $\frac{10}{32}$

(D) $\frac{11}{32}$

(E) $\frac{12}{32}$

Zadanie 9.
W pewnym ubezpieczeniu proces pojawiania się szkód jest procesem Poissona z oczekiwaną liczbą szkód w ciągu roku równą 3, a wartości pojedynczych szkód (niezależne nawzajem i od procesu pojawiania się szkód) mają rozkład ciągły o gęstości równej 1 na przedziale $(0,1)$.

Ubezpieczony stosuje następującą strategię zgłaszania szkód w ciągu roku:
- Nie zgłasza szkód, dopóki nie zdarzy mu się szkoda o wartości przekraczającej 1/3.
- Zgłasza pierwszą szkodę, która przekroczyła wartość 1/3, po czym zgłasza ewentualne następne szkody bez względu na to, jaka jest ich wartość.

Charakter ubezpieczenia jest przy tym taki, że decyzja o niezgłoszeniu danej szkody jest nieodwołalna – nie ma więc możliwości zgłoszenia danej szkody dopiero wtedy, kiedy zajdzie któraś z następnych szkód.

Oczekiwana wartość szkód nie-zgłoszonych w ciągu roku z tego ubezpieczenia wynosi (z dobrym przybliżeniem):

(A) 0,053

(B) 0,060

(C) 0,068

(D) 0,076

(E) 0,084

Zadanie 10.
W pewnym portfelu ubezpieczeń szkody zawsze zgłaszane są nie później, niż w roku następującym po roku zajścia. Niech z ogólnej liczby N szkód zaszłych w danym roku N_0 oznacza liczbę szkód zgłoszonych w tym samym roku, zaś N_1 liczbę szkód zgłoszonych w roku następnym. Załóżmy, że przy danej wartości λ parametru ryzyka Λ liczby N_0 i N_1 to niezależne zmienne losowe rozkładach Poissona z wartościami oczekiwanymi równymi $\frac{3}{4}\lambda$ oraz $\frac{1}{4}\lambda$, odpowiednio.
Parametr ryzyka Λ jest zmienną losową o rozkładzie określonym na półosi dodatniej, z wartością oczekiwaną równą 100, i wariancją równą także 100. Na koniec roku dokonujemy predykcji liczby niezgłoszonych jeszcze szkód z tego roku:

$$Pred(N_1|N_0) = a + bN_0,$$

przy czym dobieramy współczynniki a oraz b tak, by zminimalizować błąd średniokwadratowy predyktora.

Jeśli liczba szkód zgłoszonych N_0 wyniosła 82, to wartość naszego predyktora wyniesie:

(A) 25,5

(B) 26

(C) 26,5

(D) 27

(E) 27,5

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 26 marca 2018r.

Matematyka pozostałych ubezpieczeń osobowych i majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....KLUCZ ODPOWIEDZI............................

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	A	
2	D	
3	A	
4	E	
5	E	
6	B	
7	B	
8	C	
9	A	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.