

**Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy**

**LXXVIII Egzamin dla Aktuariuszy**

**Sesja egzaminacyjna w dniu 26 marca 2018r.**

**Matematyka finansowa,**

**Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: .....**

**Czas trwania egzaminu: 100 minut**

**Zadanie 1.**

Spółka  $\lambda$  ma do zrealizowania siedem płatności ( $V_t$ ), z których każda dokonywana jest na koniec roku. Wysokość pierwszej płatności w dniu jej wystąpienia ma wartość 10, natomiast czwarta: 27,44. Ponadto wiadomo, że:

$$V_n = \{(t; V \cdot q^{t-1}) : t = 1, 2, \dots, n; V > 0\}$$

Spółka zdecydowała się na immunizację płatności poprzez zainwestowanie w trzy rodzaje obligacji zerokuponowych: o trzyletnim, pięcioletnim oraz dziesięcioletnim terminie wykupu. Udział w portfelu obligacji trzyletnich i pięcioletnich jest jednakowy. Przyjmując płaską krzywą dochodowości na poziomie 5%, wyznacz obecną wartość obligacji dziesięcioletnich wykorzystanych przez spółkę  $\lambda$  do immunizacji płatności. Podaj najbliższą wartość.

- (A) 29,76
- (B) 33,33
- (C) 37,33
- (D) 41,81
- (E) 46,82

**Zadanie 2.**

Proces cen instrumentu finansowego zdefiniowany jest równaniem:

$$S_t = S_0 \cdot \exp \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right],$$

gdzie  $W_t$  oznacza stochastyczny proces Wienera.

Posiada on rozkład logarytmiczno-normalny o parametrach:

$$\Phi \left[ \ln S_0 + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t; \sigma^2 t \right].$$

Wiadomo, że średnia stopa zwrotu dla  $S_t$  wyrażona w stosunku rocznym osiągnięta przez inwestorów w krótkich okresach wynosi 20% a zmienność cen instrumentu finansowego w skali miesiąca osiąga wartość 7,22%. Aktualna cena jest na poziomie 60. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że cena instrumentu finansowego  $S_t$  za 7 miesięcy będzie znajdować się w przedziale od 54,70 do 80,13.

- (A) 68%
- (B) 80%
- (C) 90%
- (D) 95%
- (E) 99,7%

**Zadanie 3.**

Strategia zabezpieczająca krótką pozycję w opcjach kupna 10 tys. akcji spółki  $\beta$  nie wypłacającej dywidendy z ceną wykonania 50 i terminem wygaśnięcia za rok wymaga przyjęcia w chwili  $t=0$  długiej pozycji w 7486 jednostkach akcji. Oznacza to pożyczenie na rynku gotówkowym 315,8 tys. j.p.

Przyjęto następujące założenia:

- proces ceny akcji opisany jest geometrycznym ruchem Browna:

$$S_t = S_0 e^{(\mu t + \sigma B_t)}$$

- dryf ( $\mu$ ) i zmienność ( $\sigma$ ) są stałe;
- ceny akcji opisane są rozkładem logarytmiczno-normalnym;
- stopa wolna od ryzyka nie zmienia się w okresie ważności opcji i wynosi 7.5% w skali roku;
- koszty transakcyjne oraz podatki są pominięte.

Wyznacz zmienność akcji spółki  $\beta$  w skali roku.

- (A) 11%
- (B) 14%
- (C) 17%
- (D) 20%
- (E) 23%

**Zadanie 4.**

Aktualna cena rynkowa 5,5 letnich obligacji komunalnych o wartości nominalnej  $F$  z kwartalnymi płatnościami kuponowymi wynosi 720. Na giełdzie notowane są również europejskie opcje kupna i sprzedaży, dla których walorem bazowym są powyższe obligacje a cena wykonania odpowiada wartości nominalnej. Do wygaśnięcia opcji pozostało jedenaście miesięcy, a pierwsze płatności kuponowe mają nastąpić po upływie trzech miesięcy.

Wiedząc, że:

- w chwili  $t=0$  cena obligacji uwzględniana w procesie wyceny opcji ma wartość 698;
- cena wykonania określona jako kwotowany kurs obligacji, który będzie obowiązywał w przypadku realizacji opcji wynosi 805;
- stopy procentowe w skali rocznej wynoszą odpowiednio: 3-miesięczna – 4%, 6-miesięczna – 4.5%, 9-miesięczna – 5%;

wyznacz nominalną stopę zwrotu z obligacji. Podaj najbliższą wartość.

- (A) 3.63%
- (B) 3.66%
- (C) 3.69%
- (D) 3.72%
- (E) 3.75%

**Zadanie 5.**

Inwestor stoi przed problemem wyboru inwestycji w jeden z portfeli:

- Portfel A: zawiera w 100% długie pozycje w opcjach sprzedaży akcji spółki Y z rocznym terminem wygaśnięcia i ceną wykonania 10.
- Portfel B: zawiera w 70% długie pozycje w opcjach sprzedaży akcji spółki Q z rocznym terminem wygaśnięcia i ceną wykonania 25 oraz w 30% akcje spółki Q.
- Portfel C: zawiera w 50% akcje spółki Y oraz w 50% akcje spółki Q.

Aktualna cena akcji spółka Y wynosi 9, natomiast opcji sprzedaży tej spółki – 1.5, natomiast notowania dla spółki Q wynoszą odpowiednio: cena akcji – 20, cena opcji sprzedaży – 2.

Wiadomo, że ceny akcji za rok charakteryzują rozkłady jednostajne: dla spółki Y określone na przedziale (5; 20), dla spółki Q - na przedziale (10; 50).

Kierując się maksymalizacją oczekiwanej stopy zwrotu, który portfel powinien wybrać inwestor. Podaj o ile oczekiwana stopa zwrotu będzie wyższa w porównaniu do portfela przynoszącego najniższy zysk.

- (A) 0.69
- (B) 0.578
- (C) 0.344
- (D) 0.25
- (E) 0.144

**Zadanie 6.**

Stała cena pieniądza w każdym z przedziałów  $(t_{j-1}^{(i)}, t_j^{(i)})$  opisana jest za pomocą nominalnej stopy procentowej  $r_j^{(i)}$ . Rozkład oprocentowania dla  $t \in (t_{j-1}^{(i)}, t_j^{(i)})$  opisuje następująca funkcja:

$$P(t) = \begin{cases} 0,02 & t \in \left(0, \frac{1}{12}\right] \\ 0,03 & t \in \left(\frac{1}{12}, \frac{4}{12}\right] \\ 0,035 & t \in \left(\frac{4}{12}, \frac{7}{12}\right] \\ 0,03 & t \in \left(\frac{7}{12}, \frac{8}{12}\right] \\ 0,025 & t \in \left(\frac{8}{12}, \frac{13}{12}\right] \end{cases}$$

Zakładając kwartalną kapitalizację wyznacz przeciętne nominalne stopy procentowe  $\{\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3, \bar{r}_4\}$  dla kwartalnej struktury terminowej. Wskaż odpowiednie wartości.

- (A) {0.025, 0.0325, 0.03, 0.025}
- (B) {0.0245, 0.0324, 0.0276, 0.025}
- (C) {0.025, 0.0333, 0.035, 0.025}
- (D) {0.028, 0.0325, 0.032, 0.025}
- (E) {0.0267, 0.0333, 0.03, 0.025}

**Zadanie 7.**

Aktualny kurs EUR wynosi 4.20 PLN. Przyjęto, że w każdym z nadchodzących dwóch miesięcy kurs EUR/PLN wyniesie:

$$\text{dla } t=1: S_{t+1}=\{s_2; 4.25\},$$

$$\text{dla } t=2: S_{t+2}=\{4.10; s_5; 4.30\}.$$

Zakłada się, że wolna od ryzyka stopa procentowa w strefie Euro kształtuje się na poziomie 0.5% w skali roku, natomiast w Polsce na poziomie 2%. Inwestor, który ma do zrealizowania zobowiązanie w wysokości 100 tys. EUR nabywa dwumiesięczne europejskie opcje, których cena wykonania wynosi 4.20 PLN. Wyznacz wartość opcji wykorzystanych do zabezpieczenia całej pozycji? Do kalkulacji przyjmij, że jedna opcja odnosi się do jednej jednostki waluty. Podaj najbliższą wartość.

- (A) 3 035 PLN
- (B) 3 042 PLN
- (C) 3 049 PLN
- (D) 3 056 PLN
- (E) 3 066 PLN



**Zadanie 8.**

Zasady działania funduszu oszczędnościowo-rozliczeniowego są następujące:

- na początku pierwszego roku działalności funduszu (1 stycznia) dokonana została pierwsza wpłata,
- na końcu każdego roku (31 grudnia) dokonywana jest wypłata w wysokości 15% aktualnego stanu funduszu,
- na początku każdego roku (1 stycznia), począwszy od drugiego roku działalności, dokonywana jest wpłata do funduszu w wysokości 50 000,
- stopa procentowa funduszu wynosi 7,5%.

Ponadto wiadomo, że łączna kwota wypłacona z funduszu w okresie pierwszych 10 lat funkcjonowania wynosi 1 401 708.

Ze względu na przyjęte zasady działania wartość funduszu zmniejsza się w czasie. Po zakończeniu którego roku działalności funduszu (i dokonaniu stałej wpłaty na początku następnego roku) jego wartość po raz pierwszy obniży się poniżej 600 000.

A) 31

B) 32

C) 33

D) 34

E) 35

**Zadanie 9.**

Kredyt jest wypłacany przez bank w 3 transzach, płatnych na początku roku w odstępach 2 letnich. Wiadomo, że wysokość pierwszej transzy wynosi  $K$ , a każda kolejna transza jest mniejsza od poprzedniej o 50 000.

Każda transza kredytu spłacana jest w postaci 10 letniej renty o równych płatnościach dokonywanych na końcu kolejnych lat, przy czym pierwsza rata płacona jest po upływie roku od wypłacenia danej transzy kredytu.

Wiadomo, że sumaryczna kwota odsetek zapłaconych w ratach płatnych na końcu 7, 8 i 9 roku (lata są liczone od momentu wypłaty pierwszej transzy kredytu) wynosi 75 000, a stopa procentowa jest równa 7%.

Wyznacz wartość  $K$ . Podaj najbliższą wartość.

- A) 230 000
- B) 240 000
- C) 250 000
- D) 260 000
- E) 270 000

**Zadanie 10.**

Kredyt będzie spłacany okresie 25 lat, ratami płatnymi na końcu każdego roku w sposób następujący:

- pierwsza rata równa jest  $A$ , a każda następna, w okresie pierwszych 15 lat, jest mniejsza od poprzedniej o  $R$ ,
- raty płatne na końcu roku 16, 17, ..., 25 spełniają warunek, że każda rata jest większa od poprzedniej o 5%,
- oprocentowanie kredytu wynosi 6,5%.

Wiadomo, że stosunek wartości odsetek zapłaconych w 10 racie do wartości odsetek zapłaconych w 20 racie wynosi 1,672. Oblicz ile wynosi stosunek  $A/R$ .

Podaj najbliższą wartość.

A) 41

B) 43

C) 45

D) 47

E) 49

Dystrybuanta rozkładu normalnego  $N(0,1)$ 

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

**Egzamin dla Aktuariuszy**  
**Sesja egzaminacyjna w dniu 26 marca 2018r.**

**Matematyka finansowa**

**Arkusz odpowiedzi\***

Imię i nazwisko :                      KLUCZ ODPOWIEDZI

Pesel:

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	B	
2	A	
3	D	
4	E	
5	A	
6	E	
7	C	
8	D	
9	E	
10	C	

\* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.