Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXVI Egzamin dla Aktuariuszy z 12 czerwca 2017 r.

Część III

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: ....

Czas egzaminu: 100 minut

Komisja Nadzoru Finansowego, Warszawa 12.06.2017 r.

Zadanie 1.
Każdej jednostce z pewnej populacji przydarzają się szkody zgodnie z procesem Poissona z intensywnością λ (rocznie), pod warunkiem że parametr ryzyka Λ charakteryzujący tę jednostkę wynosi λ. Znamy pierwsze trzy momenty rozkładu zmiennej Λ w tej populacji:
$E\Lambda = 0.2$, $E(\Lambda^2) = 0.1$, $E(\Lambda^3) = 0.08$.
Niech N oznacza liczbę szkód wygenerowaną przez (losowo wybraną z tej populacji) jednostkę w ciągu dwóch kolejnych lat. Moment centralny trzeciego rzędu zmiennej N wynosi:

(A) 0.416

(B) 0.832

(C) 1.124

(D) 1.408

(E) 1.664

Zadanie 2.
Rozważamy model nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym:
$U_n = u + X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, gdzie:

- u to nadwyżka początkowa (nieujemna);
- $X_1, X_2, X_3, \ldots$ są i.i.d, i reprezentują różnice pomiędzy wpływami ze składki a wydatkami na odszkodowania w kolejnych latach;

rozkład zmiennej $\boldsymbol{X_1}$ jest pięciopunktowy:

$$\Pr(X_1 = 3) = p_3,$$
$$\Pr(X_1 = 2) = p_2,$$
$$\Pr(X_1 = 1) = p_1,$$
$$\Pr(X_1 = 0) = p_0,$$
$$\Pr(X_1 = -1) = 1 - p_0 - p_1 - p_2 - p_3.$$

Niech $N = \min\{n\colon\ U_n < 0\}$ oznacza czas ruiny.
Przyjmijmy, że parametry procesu wynoszą: $p_0 = p_1 = p_2 = p_3 = 1/12$, oraz $u = 9/2$. W tych warunkach ruina jest pewna, a więc $\Pr(N < \infty) = 1$. Wobec tego oczekiwany czas do ruiny $\mathrm{E}(N)$ jest wielkością dobrze określoną, i wynosi:

(A) 30

(B) 25

(C) 21

(D) 18

(E) 15

Wskazówka: zauważ, że przyrosty nadwyżki są liczbami całkowitymi, a przyrost ujemny może wynieść jedynie -1.

Zadanie 3.
Wiadomo, że zmienne losowe N_1, N_2, N_3 są niezależne, i mają rozkłady określone na zbiorze liczb całkowitych nieujemnych, spełniające zależności rekurencyjne:

$$\Pr(N_1 = k) = \frac{1}{2} \cdot \Pr(N_1 = k-1), \qquad k = 1,2,3,...$$

$$\Pr(N_2 = k) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2k}\right) \cdot \Pr(N_2 = k-1), \qquad k = 1,2,3,...$$

$$\Pr(N_3 = k) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{k}\right) \cdot \Pr(N_3 = k-1), \qquad k = 1,2,3,...$$

Wobec tego $\Pr(N_1 + N_2 + N_3 = 3)$ wynosi:

(A) $\frac{9}{128}$

(B) $\frac{14}{128}$

(C) $\frac{17}{128}$

(D) $\frac{21}{128}$

(E) $\frac{25}{128}$

Zadanie 4.
Proces pojawiania się szkód startuje w momencie $T_0 = 0$. Niech T_n oznacza moment zajścia n-tej szkody. Ponieważ szkody numerujemy według kolejności zajścia, wobec tego zachodzi $0 < T_1 < T_2 < \dots$.
Wypłata odszkodowania za n-tą szkodę następuje w momencie $T_n + D_n$. Załóżmy, iż zmienne losowe: T_1, $(T_2 - T_1)$, $(T_3 - T_2)$, ...
oraz: D_1, D_2, D_3, ...
są wszystkie nawzajem niezależne i mają identyczny rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej 1.
Prawdopodobieństwo, iż dla pewnego ustalonego n wypłata odszkodowania za szkodę $n+2$-gą poprzedzi wypłatę odszkodowania za szkodę n-tą wynosi:

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{1}{6}$

(C) $\frac{1}{10}$

(D) $\frac{1}{9}$

(E) $\frac{1}{8}$

Zadanie 5.

Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki ubezpieczyciela z czasem ciągłym:

- skumulowana wartość szkód $S(t)$ jest procesem złożonym Poissona, w którym intensywność pojawiania się szkód wynosi $\lambda = 100$, zaś rozkład wartości pojedynczej szkody dany jest na półosi dodatniej gęstością:
  $f_Y(x) = \frac{3}{16}\exp\left(-\frac{1}{4}x\right) + \frac{1}{32}\exp\left(-\frac{1}{8}x\right)$
- intensywność składki (napływającej w sposób ciągły) wynosi $c = 750$,

Wiadomo, że przy takich założeniach funkcja prawdopodobieństwa ruiny (jako funkcja wysokości nadwyżki początkowej u) jest postaci:

$$\Psi(u) = a_1 \exp(-r_1 u) + a_2 \exp(-r_2 u),$$

Suma parametrów tego wzoru $(a_1 + a_2)$ wynosi:

(A) $\frac{3}{5}$

(B) $\frac{2}{3}$

(C) $\frac{3}{4}$

(D) $\frac{4}{5}$

(E) $\frac{5}{6}$

Zadanie 6.
W pewnym ubezpieczeniu szkody zawsze likwidowane są nie później, niż w roku następującym po roku zajścia. Niech $X_{t,0}$ oraz $X_{t,1}$ oznaczają łączną wartość szkód zaistniałych w roku t, a likwidowanych w tym samym roku oraz w roku następnym, odpowiednio. Mamy w dyspozycji próbkę obserwacji z lat $t = 1,2,...,n$:

- $X_{1,0}, X_{1,1}, X_{2,0}, X_{2,1}, ..., X_{n,0}, X_{n,1}$.

Zakładamy, że wszystkie powyższe zmienne są niezależne, i mają rozkłady Gamma o parametrach:

$X_{t,0} \sim \Gamma(\alpha_0, \beta)$, $\quad t = 1,2,...,n$,

$X_{t,1} \sim \Gamma(\alpha_1, \beta)$, $\quad t = 1,2,...,n$.

Nie znamy wartości parametrów $(\alpha_0, \alpha_1, \beta)$, w istocie jednak interesuje nas jedynie parametr $\mu_0 := \frac{\alpha_0}{\alpha_0 + \alpha_1}$

Rozważamy dwa estymatory tego parametru:

$$\hat{\mu}_0 := \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \frac{X_{t,0}}{X_{t,0} + X_{t,1}}, \text{ oraz } \hat{\hat{\mu}}_0 := \frac{\sum_{t=1}^{n} X_{t,0}}{\sum_{t=1}^{n} X_{t,0} + \sum_{t=1}^{n} X_{t,1}}$$

Stosunek wariancji tych estymatorów:

$$\frac{\mathrm{var}(\hat{\mu}_0)}{\mathrm{var}(\hat{\hat{\mu}}_0)}$$

wynosi:

(A) $\dfrac{\alpha_0 + \alpha_1 + \frac{1}{n}}{\alpha_0 + \alpha_1 + 1}$

(B) $\dfrac{\alpha_0 + \alpha_1 + \frac{1}{n}}{\alpha_0 + \alpha_1 + \frac{1}{n^2}}$

(C) $\dfrac{\alpha_0 + \alpha_1 + 1}{\alpha_0 + \alpha_1 + \frac{1}{n}}$

(D) $\dfrac{\alpha_0 + \alpha_1 + \frac{1}{n^2}}{\alpha_0 + \alpha_1 + \frac{1}{n}}$

(E) 1

Zadanie 7.
Rozważamy klasyczny proces nadwyżki ubezpieczyciela:
$U(t) = u + c \cdot t - S(t)$
gdzie:
- u – to nadwyżka początkowa,
- $S(t)$ - to łączna wartość szkód do momentu t, tworząca złożony proces Poissona z parametrem częstotliwości λ, z wykładniczymi szkodami o wartości oczekiwanej $1/\beta$
- Parametr intensywności składki wynosi $c = \frac{11\lambda}{10\beta}$

Wiemy, że przy aktualnej wysokości kapitału początkowego u spełniony jest warunek:
- $\Psi(u) = 1/5$.

Udziałowcy postanowili zwiększyć nadwyżkę początkową dwukrotnie. Po tej zmianie prawdopodobieństwo ruiny $\Psi(2u)$ wyniesie:

(A) 0.0400

(B) 0.0484

(C) 0.0440

(D) 0.0512

(E) za mało danych do udzielenia odpowiedzi liczbowej

Zadanie 8.
W pewnym ubezpieczeniu mamy do czynienia z ciągłym, liniowym wzrostem liczby ryzyk w portfelu, co wyraża założenie, iż zmienna $T_1 \in (0,1)$ wyrażająca moment zajścia losowo wybranej szkody z tego portfela w ciągu roku (o ile oczywiście do szkody dojdzie) ma rozkład dany gęstością:

- $f_1(t) = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}t$.

Niech T_2 oznacza odstęp w czasie od momentu zajścia szkody do jej likwidacji. Zmienna ta ma rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną równą 2 (lata).

Zakładamy że zmienne losowe T_1 oraz T_2 są niezależne. Prawdopodobieństwo, iż szkoda wybrana losowo spośród tych, które zaszły w ciągu roku, pozostanie niezlikwidowana na koniec tego roku, z dobrym przybliżeniem wynosi:

(A) 73.7%

(B) 76.5%

(C) 80.0%

(D) 82.6%

(E) 85.7%

Zadanie 9.

W pewnym ubezpieczeniu proces pojawiania się szkód jest procesem Poissona z oczekiwaną liczbą szkód w ciągu roku równą 2, a wartości pojedynczych szkód (niezależne nawzajem i od procesu pojawiania się szkód) mają rozkład ciągły o gęstości równej 1 na przedziale $(0,1)$.

Ubezpieczony stosuje następującą strategię zgłaszania szkód w ciągu roku:

- Nie zgłasza szkód, dopóki nie zdarzy mu się szkoda o wartości przekraczającej ½
- Zgłasza pierwszą szkodę, która przekroczyła wartość ½, po czym zgłasza ewentualne następne szkody bez względu na to, jaka jest ich wartość.

Charakter ubezpieczenia jest przy tym taki, że decyzja o niezgłoszeniu danej szkody jest nieodwołalna – nie ma więc możliwości zgłoszenia danej szkody dopiero wtedy, kiedy zajdzie któraś z następnych szkód.

Oczekiwana wartość szkód zgłoszonych w ciągu roku z tego ubezpieczenia wynosi (z dobrym przybliżeniem):

(A) 0.75

(B) 0.77

(C) 0.79

(D) 0.82

(E) 0.84

Zadanie 10.
Pewien podmiot posiada wyjściowy majątek o wartości w, i narażony jest na stratę X. Strata X jest zmienną losową o rozkładzie dwupunktowym:
$\Pr(X=1)=q$, $\Pr(X=0)=1-q$

Rynek ubezpieczeniowy oferuje kontrakty ubezpieczeniowe wypłacające αX za szkodę w wysokości X dla dowolnych $\alpha \in (0,1]$, w zamian za składkę w wysokości $(1+\theta)\cdot q \cdot \alpha$.

Podmiot ten postępuje racjonalnie, a w swoich decyzjach kieruje się maksymalizacją oczekiwanej użyteczności, przy czym jego funkcja użyteczności jest postaci:
$u(x)=-\exp(-x)$.

Jeśli założymy, że $\theta=1/8$, zaś $q=1/9$, wtedy podmiot, o którym mowa, osiągnie maksimum oczekiwanej użyteczności wybierając kontrakt z pokryciem równym (wybierz najlepsze przybliżenie):

(A) $\alpha \approx 77\%$

(B) $\alpha \approx 80\%$

(C) $\alpha \approx 84\%$

(D) $\alpha \approx 87\%$

(E) $\alpha \approx 90\%$

Egzamin dla Aktuariuszy z 12 czerwca 2017 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : KLUCZ ODPOWIEDZI

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	D	
2	A	
3	B	
4	E	
5	B	
6	A	
7	C	
8	C	
9	E	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.